ΜΑΤΘΑΙΟΥ Ν. ΜΙΧΑΛΟΔΗΜΗΤΡΑΚΗ
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΝΕΥΤΩΝΕΙΑΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1986

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α) ΚΙΝΗΣΗ ΕΝΟΣ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

α) Μονοδιάστατη κίνηση

1) Υλικό σημείο με μάζα m κινείται πάνω σε ευθεία με την επίδραση της ελκτικής δύναμης $F = -k/x^2$ $(k > 0)$. Αρχικά ηρεμεί στη θέση $x = \alpha$. Να βρεθεί η κίνησή του καθώς και ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει στο ελκτικό κέντρο Ο.

Λύση

Πρώτος τρόπος: Θα χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα της ενέργειας. Η δυναμική ενέργεια του υλικού σημείου είναι

$$V = -\int F(x)dx = -k/x$$

Άρα το ολοκλήρωμα της ενέργειας είναι

$$\frac{1}{2}\, m\dot{x}^2 - \frac{k}{x} = \sigma\tau\alpha\theta. = \frac{1}{2}\, m\dot{x}_0^2 - \frac{k}{\alpha} \tag{1}$$

Επειδή η αρχική ταχύτητα $\dot{x}_0$ είναι μηδενική, η (1) δίνει

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{m}} \cdot \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{\alpha}} \tag{2}$$

όπου το πρόσημο μείον στη ρίζα σημαίνει ότι το x ελαττώνεται με το χρόνο (δηλ. $\dot{x} < 0$). Ολοκληρώνουμε την (2)

$$\sqrt{\frac{2k}{m}} \int_0^t dt = -\int_\alpha^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{\alpha}}}$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους κάνουμε την αντικατάσταση $x = \alpha\sigma\upsilon\nu^2\vartheta$ οπότε βρίσκουμε

$$\sqrt{\frac{2k}{m}}\, t = \alpha^{3/2} \int_0^\vartheta 2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta d\vartheta = \alpha^{3/2}\left(\vartheta + \frac{1}{2}\, \eta\mu 2\vartheta\right) \tag{3}$$

Τελικά

$$t=\sqrt{\frac{m\alpha^3}{2k}}\,(\vartheta+\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta)=\sqrt{\frac{m\alpha^3}{2k}}\left[\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\sqrt{\frac{x}{\alpha}}+\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha x-x^2}\right] \tag{4}$$

Η (4) συνδέει το χρόνο t και τη θέση x του υλικού σημείου. Για να φτάσει το υλικό σημείο στην αρχή Ο, δηλ. για να γίνει $x=0$, χρειάζεται, σύμφωνα με την (4), χρόνος ίσος με

$$\tau=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m\alpha^3}{2k}}$$

Δεύτερος τρόπος: Θα χρησιμοποιήσουμε τη Δ.Ε της κίνησης, δηλ.

$$m\,\frac{d\upsilon}{dt}=-\frac{k}{x^2} \tag{5}$$

Αλλά είναι

$$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{d\upsilon}{dx}\cdot\upsilon=\frac{1}{2}\,\frac{d(\upsilon^2)}{dx}$$

Άρα η (5) γίνεται

$$d\Big(\frac{1}{2}\,m\upsilon^2\Big)=-kx^{-2}dx=d(kx^{-1}) \tag{6}$$

ή

$$d\Big(\frac{1}{2}\,m\dot{x}^2-k/x\Big)=0$$

ή

$$\frac{1}{2}\,m\dot{x}^2-k/x=\sigma\tau\alpha\theta.$$

δηλαδή καταλήξαμε στο ολοκλήρωμα της ενέργειας. Από εδώ και πέρα συνεχίζουμε όπως στον πρώτο τρόπο.

2) Υλικό σημείο με μάζα m κινείται πάνω σε ευθεία με την επίδραση της απωθητικής δύναμης $F=kx$ $(k>0)$. Αρχικά βρίσκεται στη θέση $x=\alpha>0$ και έχει ταχύτητα υ_0 που διευθύνεται προς το απωθητικό κέντρο

O. Να βρεθεί η κίνησή του. Για ποιες τιμές της υ_0 το υλικό σημείο μπορεί να φτάσει στο O;

Λύση

Η Δ.Ε της κίνησης είναι

$$m\ddot{x} = kx \quad ή \quad \ddot{x} - \omega^2 x = 0 \quad (\omega^2 = k/m)$$

Η γενική λύση της είναι

$$x = c_1 \cosh\omega t + c_2 \sinh\omega t \tag{1}$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 θα βρεθούν με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών. Για το σκοπό αυτό, παραγωγίζουμε την (1) και βρίσκουμε την ταχύτητα

$$\dot{x} = \omega c_1 \sinh\omega t + \omega c_2 \cosh\omega t \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές-συνθήκες $t = 0$, $x = \alpha$, $\dot{x} = -\upsilon_0$ στις (1) και (2) βρίσκουμε

$$\alpha = c_1, \quad -\upsilon_0 = \omega c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \alpha, \quad c_2 = -\upsilon_0/\omega$$

Επομένως οι (1), (2) γίνονται

$$x = \alpha\cosh\omega t - \omega^{-1}\upsilon_0 \sinh\omega t \tag{3}$$

$$\dot{x} = \omega\alpha\sinh\omega t - \upsilon_0 \cosh\omega t \tag{4}$$

Για να φτάσει το υλικό σημείο στο O τη στιγμή $t = \tau$ πρέπει να είναι $x(\tau) = 0$ ή, σύμφωνα με την (3), πρέπει

$$\tanh\omega\tau = \alpha\omega/\upsilon_0 \tag{5}$$

Για να ικανοποιείται η (5) πρέπει να είναι $\alpha\omega/\upsilon_0 \leqslant 1$, οπότε ο χρόνος τ είναι ίσος με

$$\tau = \omega^{-1}\tanh^{-1}(\alpha\omega/\upsilon_0) \tag{6}$$

Στην ειδική περίπτωση που είναι $\alpha\omega/\upsilon_0 = 1$, προκύπτει $\tau = \infty$, δηλ. το υλικό σημείο τείνει προς το O χωρίς ποτέ να το φτάσει. Κατά την κίνηση με $\alpha\omega/\upsilon_0 \leqslant 1$ η ταχύτητα ποτέ δε μηδενίζεται. Πράγματι, για να υπάρξει χρονική στιγμή $t = \tau_1$ που θα μηδενιστεί η ταχύτητα πρέπει, σύμφωνα με την (4), να είναι

$$0 = \omega\alpha\sinh\omega\tau_1 - \upsilon_0\cosh\omega\tau_1 \quad \text{ή} \quad \tanh\omega\tau_1 = \upsilon_0/\alpha\omega \tag{7}$$

Όμως, η (7) ποτέ δεν ικανοποιείται γιατί είναι $\upsilon_0/\alpha\omega > 1$. Όταν είναι $\alpha\omega/\upsilon_0 > 1$, η (5) ποτέ δεν ικανοποιείται ενώ η (7) ικανοποιείται, δηλ. το x ποτέ δεν μηδενίζεται ενώ το $\dot{x}$ μηδενίζεται τη στιγμή

$$\tau_1 = \omega^{-1}\tanh(\upsilon_0/\alpha\omega) \tag{8}$$

Τη στιγμή τ_1 το x παίρνει την ελάχιστη τιμή του (αφού $\dot{x}(\tau_1) = 0$ και $\ddot{x}(\tau_1) > 0$) που είναι ίση με

$$x_{min} = x(\tau_1) = \sqrt{\alpha^2 - \upsilon_0^2/\omega^2}$$

Επομένως, όταν $\alpha\omega/\upsilon_0 > 1$, το υλικό σημείο πλησιάζει στο O μέχρι μια ελάχιστη απόσταση και κατόπιν αρχίζει να απομακρύνεται από το O. Μετρώντας το χρόνο t από τη στιγμή τ_1 και μετά, οι αρχικές συνθήκες για τη φάση της απομάκρυνσης είναι $t = 0$, $x = x_{min}$, $\dot{x} = 0$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στις (1) και (2) βρίσκουμε

$$c_1 = x_{min}, \quad c_2 = 0$$

οπότε οι (1), (2) γίνονται

$$x = x_{min}\cosh\omega t, \quad \dot{x} = \omega x_{min}\sinh\omega t$$

Επομένως, το υλικό σημείο απομακρύνεται συνεχώς από το O με ταχύτητα που συνεχώς αυξάνεται.

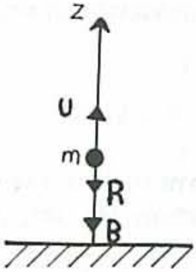
3) Υλικό σημείο με μάζα m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα υ_0. Η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της ταχύτητας. Να βρεθεί η κίνηση.

Λύση

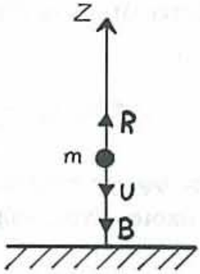
Η Δ.Ε της κίνησης είναι

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{B} + \mathbf{R} \tag{1}$$

όπου $\mathbf{r} = z\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -mg\mathbf{k}$ και $\mathbf{R} = \pm b\upsilon^2\mathbf{k}$. Όπως φαίνεται από το σχήμα, το



Άνοδος



Κάθοδος

πρόσημο (+) στην αντίσταση **R** ισχύει για την κάθοδο ($\upsilon = \dot{z} < 0$) ενώ το πρόσημο (-) για την άνοδο ($\upsilon > 0$).

α) Άνοδος. Για την άνοδο, η (1) γίνεται

$$m\,\frac{d\upsilon}{dt} = m\,\frac{d\upsilon}{dz}\,\frac{dz}{dt} = m\upsilon\,\frac{d\upsilon}{dz} = -mg - b\upsilon^2 \tag{2}$$

Από την (2) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon^2 + \lambda^2} = -kdt, \quad \frac{\upsilon d\upsilon}{\upsilon^2 + \lambda^2} = -kdz \tag{3}$$

όπου $\lambda^2 = mg/b$ και $k = b/m$.

Ολοκληρώνοντας τις (3) βρίσκουμε

$$\lambda^{-1}\text{τοξεφ}(\upsilon/\lambda) = -kt + c_1 \quad \text{ή} \quad \upsilon = \frac{dz}{dt} = \lambda\text{εφ}(-k\lambda t + \lambda c_1) \tag{4}$$

$$\ln(\upsilon^2 + \lambda^2) = -2kz + c_2 \tag{5}$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες. Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες $t = 0$, $z = 0$, $\upsilon = \upsilon_0$ στις (4) και (5) προκύπτει ότι

$$c_1 = \lambda^{-1}\text{τοξεφ}(\upsilon_0/\lambda), \quad c_2 = \ln(\upsilon_0^2 + \lambda^2)$$

Από τις (4) και (5), αντίστοιχα, προκύπτει η ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου t και της θέσης z. Ολοκληρώνοντας την (4) και παίρνοντας υπόψη ότι για $t = 0$ είναι $\upsilon = \upsilon_0$ βρίσκουμε

$$z = \frac{1}{k}\ln\frac{\text{συν}(-k\lambda t + \lambda c_1)}{\text{συν}\lambda c_1} \tag{6}$$

Από την (4) προκύπτει ότι η ταχύτητα $\dot{z}$ μηδενίζεται τη στιγμή $t = \tau$ για την οποία είναι

$$-k\lambda\tau + \lambda c_1 = 0 \quad \text{ή} \quad \tau = c_1/k$$

Την ίδια στιγμή τ το ύψος z παίρνει τη μέγιστη τιμή του (αφού $\dot{z}(t) = 0$ και $\ddot{z}(\tau) = -mg < 0$) η οποία είναι, σύμφωνα με την (6), ίση με

$$z_{max} = z(\tau) = \frac{1}{k}\ \ln\ \frac{1}{\text{συν}(\lambda c_1)} = \frac{1}{k}\ \ln\ \sqrt{1 + \text{εφ}^2(\lambda c_1)} = \frac{1}{2k}\ \ln\Big(1 + \frac{\upsilon_0^2}{\lambda^2}\Big)$$

β) **Κάθοδος.** Για την κάθοδο η (1) γίνεται

$$m\ \frac{d\upsilon}{dt} = m\ \frac{d\upsilon}{dz}\ \upsilon = -mg + b\upsilon^2 \tag{7}$$

Για να βρούμε την ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου ολοκληρώνουμε την (7) ως προς t και παίρνοντας υπόψη ότι για $t = \tau = c_1/k$ είναι $\upsilon = 0$ βρίσκουμε

$$\upsilon = dz/dt = \lambda\tanh(-k\lambda t + \lambda c_1) \tag{8}$$

Για να βρούμε το ύψος ως συνάρτηση του χρόνου ολοκληρώνουμε την (8) και παίρνοντας υπόψη ότι για $t = \tau = c_1/k$ είναι $z = z_{max}$, βρίσκουμε τελικά

$$z = -k^{-1}\ln[\cosh(-k\lambda t + \lambda c_1) \cdot \text{συν}\lambda c_1]$$

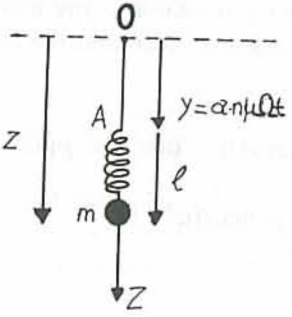
(Για να βρούμε την ταχύτητα ως συνάρτηση του ύψους πρέπει να ολοκληρώσουμε την (7) ως προς z).

4) Μάζα m κρεμιέται από κατακόρυφο ελατήριο και ισορροπεί. Τη στιγμή $t = 0$ το σημείο εξάρτησης Α του ελατηρίου αρχίζει να εκτελεί κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση $OA = \alpha\eta\mu\Omega t$ γύρω από το σταθερό σημείο Ο. Η σταθερή του ελατηρίου είναι k και το φυσικό μήκος του είναι l_0. Να βρεθεί η κίνηση.

Λύση

Η Δ.Ε της κίνησης είναι

$$m\ddot{z} = -dV/dz \tag{1}$$



Η δυναμική ενέργεια V της μάζας οφείλεται στη βαρύτητα και στη δύναμη του ελατηρίου και είναι ίση με

$$V = -mgz + k(l - l_0)^2/2 = -mgz + k[z - \alpha\eta\mu\Omega t - l_0]^2/2$$

Άρα η (1) γίνεται

$$\ddot{z} = g - \omega^2(z - \alpha\eta\mu\Omega t - l_0) \qquad (\omega^2 = k/m) \tag{2}$$

Για $t = 0$ η μάζα ισορροπεί ($\ddot{z} = 0$) σε κάποια θέση $z = z_0$ που, σύμφωνα με την (2), ικανοποιεί τη σχέση

$$0 = g - \omega^2(z_0 - l_0) \qquad \acute{\eta} \qquad z_0 = l_0 + g/\omega^2$$

Αν x είναι η μετατόπιση της m από τη θέση ισορροπίας z_0, τότε θα είναι $z = z_0 + x$ οπότε η (2) γίνεται τελικά

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \alpha\omega^2\eta\mu\Omega t \tag{3}$$

Η γενική λύση της γραμμικής Δ.Ε (3) έχει τη μορφή

$$x = c_1\sigma\upsilon\nu\omega t + c_2\eta\mu\omega t + x_p \tag{4}$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες και x_p είναι μια μερική λύση της (3). Για να βρούμε τη x_p ξεχωρίζουμε δυο περιπτώσεις:

α) $\Omega \neq \omega$. Τότε ψάχνουμε για x_p που έχει τη μορφή

$$x_p = A\sigma\upsilon\nu\Omega t + B\eta\mu\Omega t \tag{5}$$

όπου οι σταθερές A, B θα βρεθούν από την απαίτηση ότι η έκφραση (5) πρέπει να ικανοποιεί τη Δ.Ε (3). Αντικαθιστώντας λοιπόν την (5) στην (3) βρίσκουμε

$$A(\omega^2 - \Omega^2)\text{συν}\Omega t + B(\omega^2 - \Omega^2)\text{ημ}\Omega t \equiv \alpha\omega^2\text{ημ}\Omega t$$

Άρα

$$A = 0, \quad B = \alpha\omega^2/(\omega^2 - \Omega^2)$$

Επομένως η (4) γίνεται

$$x = c_1\text{συν}\omega t + c_2\text{ημ}\omega t + B\text{ημ}\Omega t \tag{6}$$

Για να βρούμε τα c_1, c_2 παραγωγίζουμε την (6) και βρίσκουμε την ταχύτητα

$$\dot{x} = -\omega c_1\text{ημ}\omega t + \omega c_2\text{συν}\omega t + \Omega B\text{συν}\Omega t \tag{7}$$

Αντικαθιστούμε τις αρχικές συνθήκες $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$ στις (6), (7) και προκύπτει ότι $c_1 = 0$ και $c_2 = -B\Omega/\omega = -\alpha\omega\Omega/(\omega^2 - \Omega^2)$. Άρα η γενική λύση της (3) είναι

$$x = \frac{\alpha\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}\left(\text{ημ}\Omega t - \frac{\Omega}{\omega}\text{ ημ}\omega t\right)$$

Επομένως η κίνηση της μάζας είναι συνισταμένη δύο αρμονικών ταλαντώσεων με συχνότητες ω και Ω. Στην ειδική περίπτωση που ο λόγος ω/Ω είναι ρητός αριθμός, η κίνηση x(t) είναι περιοδική.

β) $\Omega = \omega$. Τότε ψάχνουμε για x_p που έχει τη μορφή

$$x_p = t(A\text{συν}\omega t + B\text{ημ}\omega t) \tag{8}$$

Αντικαθιστώντας την (8) στην (3) και εξισώνοντας τους συντελεστές των όμοιων όρων βρίσκουμε $A = -\alpha\omega/2$, $B = 0$, οπότε η (4) γίνεται

$$x = c_1\text{συν}\omega t + c_2\text{ημ}\omega t - (\alpha\omega t\text{συν}\omega t)/2 \tag{9}$$

Παραγωγίζοντας την (9) βρίσκουμε την ταχύτητα

$$\dot{x} = -\omega c_1\text{ημ}\omega t + \omega c_2\text{συν}\omega t - (\alpha\omega\text{συν}\omega t)/2 + (\alpha\omega^2 t\,\text{ημ}\omega t)/2 \tag{10}$$

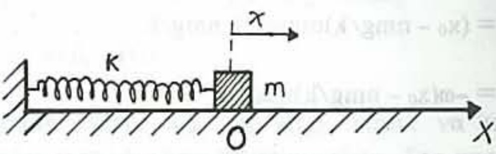
Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες $t = 0$, $x = \dot{x} = 0$ στις (9), (10) προκύπτει ότι $c_1 = 0$, $c_2 = \alpha/2$. Επομένως η (9) γίνεται

$$x = \frac{\alpha}{2}\ \text{ημ}\omega t - \frac{\alpha\omega t}{2}\ \text{συν}\omega t$$

Παρατηρούμε ότι η κίνηση της μάζας είναι συνισταμένη μιας ημιτονοειδούς ταλάντωσης με σταθερό πλάτος και μιας συνημιτονοειδούς ταλάντωσης με την ίδια συχνότητα και πλάτος που αυξάνεται με το χρόνο t (φαινόμενο συντονισμού).

5) Στο γραμμικό ταλαντωτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα ενεργεί τριβή Coulomb. Να βρεθεί η κίνηση που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες $x = x_0 > 0$ και $\dot{x} = 0$.

Λύση



Με x συμβολίζουμε τη μετατόπιση της μάζας m από τη θέση ισορροπίας. Στη μάζα m εκτός από τη δύναμη επαναφοράς $-kx$ ενεργεί και η τριβή Coulomb που είναι πάντοτε αντίθετη προς την ταχύτητα $\upsilon = \dot{x}$ι και ίση με $T = \pm nmg$ (n = συντελεστής τριβής). Το πρόσημο (+) στην T ισχύει όταν $\dot{x} < 0$ ενώ το (-) όταν $\dot{x} > 0$. Επομένως η Δ.Ε της κίνησης είναι

$$m\ddot{x} = -kx + nmg \qquad \text{όταν } \dot{x} < 0 \tag{1}$$

$$m\ddot{x} = -kx - nmg \qquad \text{όταν } \dot{x} > 0 \tag{2}$$

Είναι φανερό ότι για να μπορεί να κινείται η m πρέπει η δύναμη επαναφοράς να υπερνικήσει τη στατική τριβή, δηλ.

$$|kx| > nmg \qquad \text{ή} \qquad -\frac{nmg}{k} \geqslant x \geqslant \frac{nmg}{k} \tag{3}$$

Επομένως η αρχική θέση x_0 πρέπει να ικανοποιεί την (3) (διαφορετικά, η m θα έμενε ακίνητη στο x_0). Επειδή η m αρχίζει να κινείται προς τα αριστερά ($\dot{x} < 0$), στη φάση αυτή της κίνησης θα ισχύει η Δ.Ε (1). Η γενική λύση της (1) είναι

$$x = c_1 συν(ωt + c_2) + nmg/k \tag{4}$$

όπου $ω^2 = k/m$ και οι σταθερές c_1, c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες. Για το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε την (4) και βρίσκουμε την ταχύτητα

$$\dot{x} = -c_1 ω ημ(ωt + c_2) \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = 0$ στις (4) και (5) βρίσκουμε

$$c_1 = x_0 - nmg/k, \quad c_2 = 0 \tag{6}$$

Επομένως οι (4), (5) γίνονται

$$x = (x_0 - nmg/k) συνωt + nmg/k \tag{7}$$

$$\dot{x} = -ω(x_0 - nmg/k) ημωt \tag{8}$$

Καθώς αυξάνει ο χρόνος t, έρχεται κάποια στιγμή t_1 που η ταχύτητα $\dot{x}$ μηδενίζεται, δηλ. $ωt_1 = π$ ή $t_1 = π/ω$. Τη στιγμή t_1 η μάζα m βρίσκεται στη θέση

$$x(t_1) \equiv x_1 = c_1 συνπ + nmg/k = 2nmg/k - x_0$$

Αν η θέση x_1 δεν ικανοποιεί τον περιορισμό (3), το σώμα θα σταματήσει για πάντα στη θέση αυτή. Αν τον ικανοποιεί, δηλ. αν $x_1 = 2nmg/k - x_0 \geqslant nmg/k$ ή $x_0 \geqslant 3nmg/2$, η κίνηση θα συνεχιστεί και έτσι θα αρχίσει η δεύτερη φάση $t \geqslant t_1$ της κίνησης. Στη φάση αυτή το σώμα αρχίζει να κινείται προς τα δεξιά ($\dot{x} > 0$) και γιαυτό θα ισχύει η Δ.Ε (2).

Η γενική λύση της (2) είναι

$$x = c_1 συν(ωt + c_2) - nmg/k \tag{9}$$

Εφαρμόζοντας όπως και πριν τις «αρχικές» συνθήκες $t = t_1$, $x = x_1 = 2nmg/k - x_0$, $\dot{x} = 0$ της δεύτερης φάσης βρίσκουμε

$$c_1 = 3nmg/k - x_0, \quad c_2 = 0$$

Επομένως, από την (9) προκύπτει ότι

$$x = (x_0 - 3nmg/k)\text{συν}\omega t - nmg/k \tag{10}$$

$$\dot{x} = -\omega(x_0 - 3nmg/k)\text{ημ}\omega t \tag{11}$$

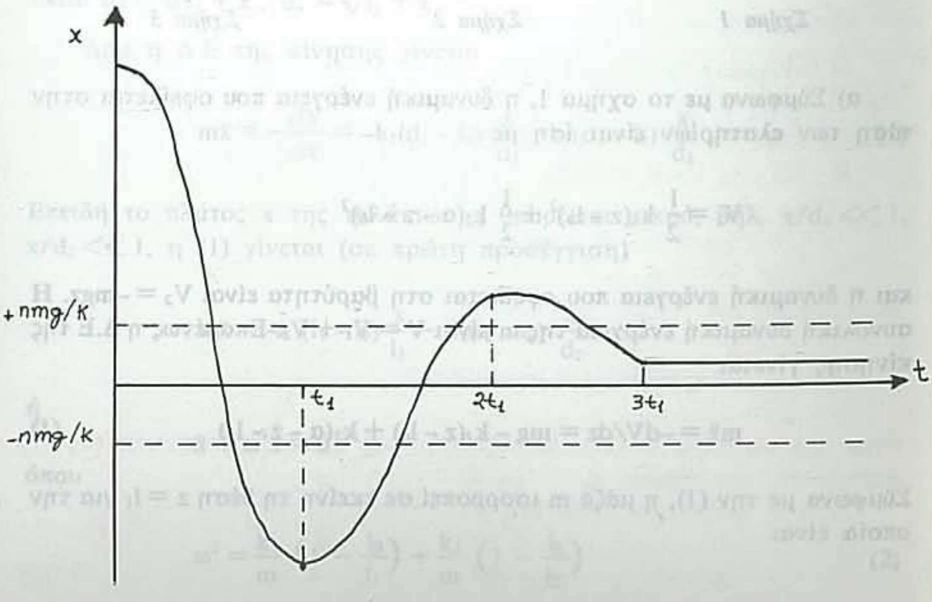
Από την (11) προκύπτει ότι η ταχύτητα στη δεύτερη φάση της κίνησης θα μηδενιστεί τη στιγμή t_2 που θα είναι $\omega t_2 = 2\pi$ ή $t_2 = 2\pi/\omega = 2t_1$. Τη στιγμή αυτή το σώμα θα βρίσκεται στη θέση $x(t_2) \equiv x_2 = x_0 - 4nmg/k$. Αν η θέση x_2 δεν ικανοποιεί τον περιορισμό (3), το σώμα θα σταματήσει για πάντα στη θέση αυτή. Αν τον ικανοποιεί, η κίνηση θα συνεχιστεί και έτσι θα αρχίσει η τρίτη φάση με $\dot{x} < 0$, κ.ο.κ. Καθώς το σώμα ταλαντώνεται, οι διαδοχικοί μηδενισμοί της ταχύτητας γίνονται στις χρονικές στιγμές

$$t_1,\ t_2 = 2t_1,\ t_3 = 3t_1,\ \ldots$$

όταν το σώμα βρίσκεται, αντίστοιχα, στις θέσεις

$$x(t_1),\ x(t_2),\ x(t_3),\ \ldots$$

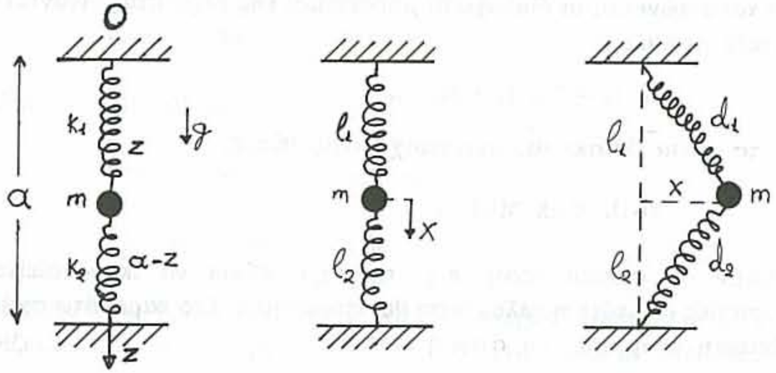
Όταν σε κάποια θέση, π.χ. τη $x(t_n)$, πάψει να ικανοποιείται ο περιορισμός (3), τότε η ταλάντωση θα σταματήσει. Στο παρακάτω σχήμα η ταλάντωση σταματάει τη στιγμή $t_3 = 3t_1$.



Παρατηρούμε ότι η τριβή Coulomb δεν επηρρεάζει τη συχνότητα της ταλάντωσης και τη σταματάει σε πεπερασμένο χρόνο (ενώ όταν υπάρχει αντίσταση ανάλογη προς την ταχύτητα η ταλάντωση δε γίνεται με τη φυσική συχνότητα ω και σταματάει μετά από άπειρο χρόνο).

6) Μάζα m συγκρατιέται από δυο ελατήρια όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1. Τα ελατήρια έχουν το ίδιο φυσικό μήκος l_0 και σταθερές k_1 και k_2. Να βρεθεί η κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων μικρού πλάτους γύρω από τη θέση ισορροπίας όταν η m κινείται α) μόνο κατακόρυφα και β) μόνο οριζόντια. Είναι $\alpha > 2l_0$.

Λύση



Σχήμα 1 *Σχήμα 2* *Σχήμα 3*

α) Σύμφωνα με το σχήμα 1, η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στην τάση των ελατηρίων είναι ίση με

$$V_1 = \frac{1}{2}\, k_1(z - l_0)^2 + \frac{1}{2}\, k_2(\alpha - z - l_0)^2$$

και η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στη βαρύτητα είναι $V_2 = -mgz$. Η συνολική δυναμική ενέργεια της m είναι $V = V_1 + V_2$. Επομένως η Δ.Ε της κίνησης γίνεται

$$m\ddot{z} = -dV/dz = mg - k_1(z - l_0) + k_2(\alpha - z - l_0) \tag{1}$$

Σύμφωνα με την (1), η μάζα m ισορροπεί σε εκείνη τη θέση $z = l_1$ για την οποία είναι

$$0 = mg - k_1(l_1 - l_0) + k_2(\alpha - l_1 - l_0) \tag{2}$$

Παίρνουμε τώρα ως νέα συντεταγμένη την εκτροπή x της μάζας από τη θέση ισορροπίας (βλέπε στο σχήμα 2), δηλ. γράφουμε $z = l_1 + x$. Τότε η (1) γίνεται

$$m\ddot{x} = mg - k_1(l_1 - l_0) + k_2(\alpha - l_1 - l_0) - (k_1 + k_2)x \tag{3}$$

Παίρνοντας υπόψη την (2) η (3) γίνεται

$$\ddot{x} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right)x = 0$$

΄Αρα η κατακόρυφη κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$.

β) Επειδή η δυναμική ενέργεια βαρύτητας είναι σταθερή (αφού $z =$ σταθ.), μπορούμε να την παραλείψουμε. ΄Αρα η συνολική δυναμική ενέργεια της m οφείλεται στα ελατήρια και είναι ίση με (βλέπε στο σχήμα 3)

$$V = \frac{1}{2}\, k_1(d_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2}\, k_2(d_2 - l_0)^2$$

όπου $d_1 = \sqrt{l_1^2 + x^2}$, $d_2 = \sqrt{l_2^2 + x^2}$.

΄Αρα η Δ.Ε της κίνησης γίνεται

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} = -k_1(d_1 - l_0)\,\frac{x}{d_1} - k_1(d_2 - l_0)\,\frac{x}{d_2} \tag{1}$$

Επειδή το πλάτος x της ταλάντωσης θεωρείται μικρό, δηλ. $x/d_1 \ll 1$, $x/d_2 \ll 1$, η (1) γίνεται (σε πρώτη προσέγγιση)

$$m\ddot{x} = -k_1(l_1 - l_0)\,\frac{x}{l_1} - k_2(l_2 - l_0)\,\frac{x}{d_2}$$

ή

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

όπου

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m}\left(1 - \frac{l_0}{l_1}\right) + \frac{k_2}{m}\left(1 - \frac{l_0}{l_2}\right) \tag{2}$$

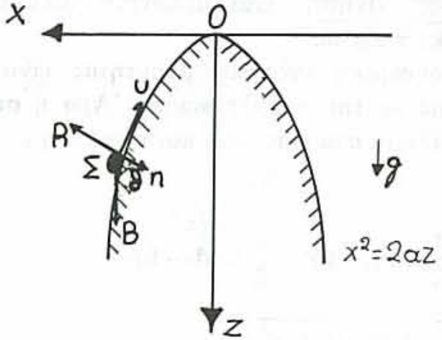
Παίρνοντας υπόψη ότι $l_1 + l_2 = \alpha$, η (2) γίνεται

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m}\left[\frac{mg + k_2(\alpha - 2l_0)}{mg + \alpha k_2 + (k_1 - k_2)l_0}\right] + \frac{k_2}{m}\left[\frac{-mg + k_1(\alpha - 2l_0)}{-mg + \alpha k_1 - (k_1 - k_2)l_0}\right]$$

Αυτή είναι η κυκλική συχνότητα των οριζόντιων ταλαντώσεων.

7) Ένα όχημα Σ ανεβαίνει με ταχύτητα που έχει σταθερό μέτρο υ πάνω στο παραβολικό ύψωμα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδειχθεί ότι αν το υ ξεπεράσει κάποια τιμή, το όχημα θα εγκαταλείψει το δρόμο. Τριβή δεν υπάρχει.

Λύση



Η αντίδραση του δρόμου πάνω στο όχημα είναι κάθετη στο δρόμο και γιαυτό γράφεται με τη μορφή $\mathbf{R} = R\mathbf{n}$ όπου $\mathbf{n}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην παραβολή όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η Δ.Ε της κίνησης είναι

$$m\gamma = \mathbf{B} + \mathbf{R} = m\mathbf{g} + R\mathbf{n} \qquad (1)$$

Πολ/ζοντας την (1) επί $\mathbf{n}$ βρίσκουμε

$$m\gamma_n = m\upsilon^2/\rho = mg\,\sigma\upsilon\nu\vartheta + R$$

όπου γ_n είναι η κεντρομόλα επιτάχυνση και ρ η ακτίνα καμπυλότητας της παραβολής στο σημείο Σ.

Άρα η αντίδραση είναι ίση με

$$R = m\upsilon^2/\rho - mg\,\sigma\upsilon\nu\vartheta \qquad (2)$$

Όμως είναι

$$συνϑ = (1 + εφ^2ϑ)^{-1/2} = [1 + (dz/dx)^2]^{-1/2} = [1 + x^2/α^2]^{-1/2}$$

$$ρ = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^{-1}\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = α[1 + x^2/α^2]^{3/2}$$

Άρα η (2) γίνεται

$$R = \frac{mα}{\sqrt{α^2 + x^2}}\left[\frac{αυ^2}{α^2 + x^2} - g\right] \tag{3}$$

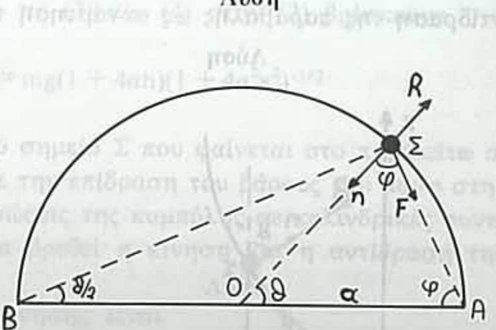
Το όχημα θα κινείται στο δρόμο εφόσον η αντίδραση **R** διευθύνεται προς τα έξω, δηλ. $R < 0$ και εγκαταλείπει το δρόμο όταν μηδενιστεί η αντίδραση. Σύμφωνα με την (3), η R μηδενίζεται στη θέση

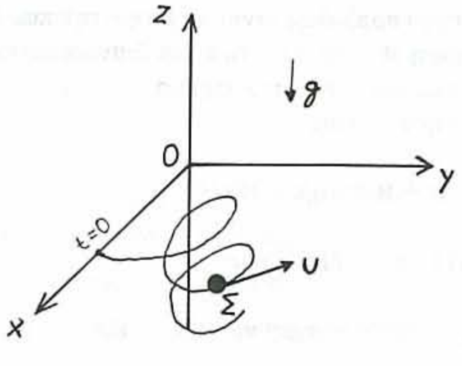
$$x_1 = \sqrt{\frac{α}{g}} \cdot \sqrt{υ^2 - αg}$$

Αν $υ = \sqrt{αg}$, τότε $x_1 = 0$, δηλ. το όχημα εγκαταλείπει το δρόμο τη στιγμή που θα φτάσει στην κορυφή της παραβολής. Αν $υ > \sqrt{αg}$, τότε $x_1 > 0$, δηλ. η εγκατάλειψη γίνεται πριν από την κορυφή. Αν $υ < \sqrt{αg}$, τότε $R(x) < 0$ για κάθε x, δηλ. το όχημα δε θα εγκαταλείψει ποτέ το δρόμο.

8) Υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται χωρίς τριβή πάνω σε οριζόντια περιφέρεια κύκλου με την επίδραση μιας ελκτικής δύναμης που προέρχεται από ένα σημείο Α της περιφέρειας και έχει μέτρο $kρ^n$, όπου $ρ = ΑΣ$. Για ποια τιμή του εκθέτη n η αντίδραση **R** της περιφέρειας έχει σταθερό μέτρο;

Λύση





όπου **R** είναι η αντίδραση της καμπύλης. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες και παίρνοντας υπόψη τις εξισώσεις της καμπύλης βρίσκουμε

$$\gamma = -\alpha\dot{\vartheta}^2 \mathbf{e}_r + \alpha\ddot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + h\ddot{\vartheta}\mathbf{k}, \quad \mathbf{R} = R_r\mathbf{e}_r + R_\vartheta\mathbf{e}_\vartheta + R_z\mathbf{k} \tag{2}$$

$$\upsilon = \alpha\dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + h\dot{\vartheta}\mathbf{k} \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας τις (2) στην (1) βρίσκουμε

$$R_r = -m\alpha\dot{\vartheta}^2, \quad R_\vartheta = m\alpha\ddot{\vartheta}, \quad R_z = mh\ddot{\vartheta} + mg \tag{4}$$

Επειδή η αντίδραση είναι κάθετη στην καμπύλη, θα είναι κάθετη και στην ταχύτητα, δηλ.

$$\mathbf{R}\cdot\upsilon = \alpha\dot{\vartheta}R_\vartheta + h\dot{\vartheta}R_z = 0$$

ή

$$R_z = -\alpha R_\vartheta / h \tag{5}$$

Από τις (4) και (5) προκύπτει ότι

$$\ddot{\vartheta} = -gh/(\alpha^2 + h^2) \tag{6}$$

Ολοκληρώνοντας την (6) και παίρνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες $t = 0$, $\vartheta = 0$, $\dot{\vartheta} = 0$, βρίσκουμε ότι η κίνηση υπακούει στην εξίσωση

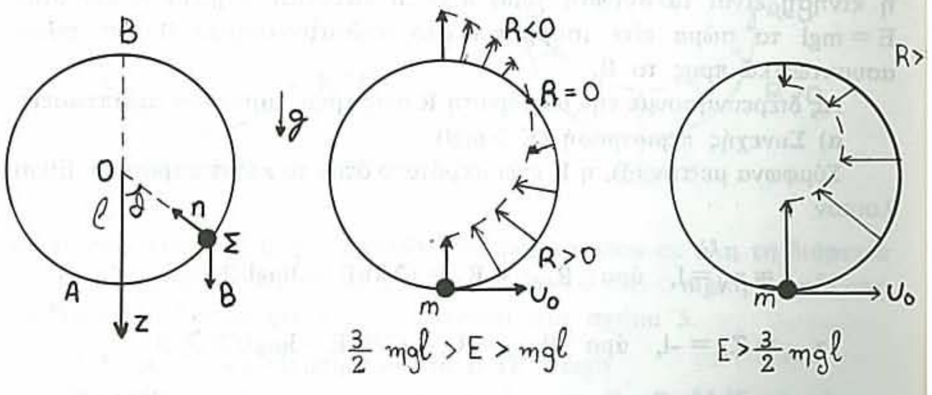
$$\vartheta = -\frac{1}{2}\,\frac{gh}{\alpha^2 + h^2}\,t^2 \tag{7}$$

Αντικαθιστώντας την (7) στις (4) βρίσκουμε ότι η αντίδραση είναι ίση με

$$R_r = -m\alpha g^2 h^2(\alpha^2 + h^2)^{-2} t^2, \quad R_\theta = -m\alpha g h(\alpha^2 + h^2)^{-1}, \quad R_z = m\alpha^2 g(\alpha^2 + h^2)^{-1}$$

11) Να βρεθεί η αντίδραση του δεσμού στο απλό μαθηματικό εκκρεμές.

Λύση



Σχήμα 1 *Σχήμα 2* *Σχήμα 3*

Επειδή η αντίδραση είναι κάθετη στην περιφέρεια, γράφεται με τη μορφή **R** = R**n** όπου **n** είναι διανυσματική μονάδα κάθετη στην περιφέρεια όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Άρα, η Δ.Ε της κίνησης είναι

$$m\boldsymbol{\gamma} = mg\mathbf{k} + R\mathbf{n} \tag{1}$$

Πολ/ζοντας την (1) επί **n** βρίσκουμε

$$m\gamma_n = m\upsilon^2/l = -mg\,\sigma\upsilon\nu\vartheta + R$$

Άρα

$$R = \frac{m\upsilon^2}{l} + mg\,\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{m\upsilon^2}{l} + \frac{mg}{l}\,z \tag{2}$$

Η υ^2 βρίσκεται από το ολοκλήρωμα της ενέργειας

$$E = m\upsilon^2/2 - mgz \quad \text{ή} \quad \upsilon^2 = 2(E + mgz)/m$$

Επομένως η αντίδραση (2) γίνεται

$$R = \frac{2}{l}\left(E + \frac{3}{2}\,mgz\right) \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι η R εξαρτιέται από την κίνηση z(t) της μάζας Σ. Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, το είδος της κίνησης καθορίζεται από την ενέργεια: όταν $E > mgl$ η κίνηση είναι συνεχής περιστροφή, όταν $E < mgl$ η κίνηση είναι ταλάντωση γύρω από το κατώτατο σημείο A και όταν $E = mgl$ το σώμα είτε ισορροπεί στο ανώτατο σημείο B είτε τείνει ασυμπτωτικά προς το B.

Ας διερευνήσουμε την αντίδραση R στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις.

α) **Συνεχής περιστροφή ($E > mgl$)**

Σύμφωνα με την (3), η R έχει ακρότατο όταν το z έχει ακρότατο. Είναι λοιπόν

$$z_{max} = z_A = l, \quad \text{άρα} \quad R_{max} = R_A = (2/l)(E + 3mgl/2) > 0$$

$$z_{min} = Z_B = -l, \quad \text{άρα} \quad R_{min} = R_B = (2/l)(E - 3mgl/2) \gtrless 0$$

Παρατηρούμε ότι η R_{max} είναι πάντα θετική (αφού $E > mgl > 0$). Αντίθετα, η R_{min} μπορεί να είναι είτε θετική (όταν $E > 3mgl/2$) είτε αρνητική (όταν $E < 3mgl/2$). Στην πρώτη περίπτωση ($R_{min} > 0$) η αντίδραση R είναι πάντα θετική, δηλ. καθώς περιστρέφεται το σώμα η **R** διευθύνεται πάντοτε προς τα μέσα (βλέπε στο σχήμα 3). Στη δεύτερη περίπτωση ($R_{min} < 0$) η αντίδραση R ελαττώνεται καθώς το σώμα ανεβαίνει από το σημείο A ώσπου σε κάποια θέση $z = z^*$ μηδενίζεται και ύστερα γίνεται αρνητική, δηλ. η **R** αλλάζει φορά στο σημείο z^* όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Σύμφωνα με την (3) η z^* είναι ρίζα της εξίσωσης

$$0 = (2/l)(E + 3mgz^*/2) \Rightarrow z^* = -2E/3mg < 0$$

β) **Συνεχής ταλάντωση ($E < mgl$)**

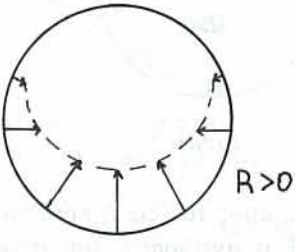
Είναι

$$z_{max} = z_A = l, \ \text{άρα} \ R_{max} = R_A = (2/l)(E + 3mgl/2) > 0$$

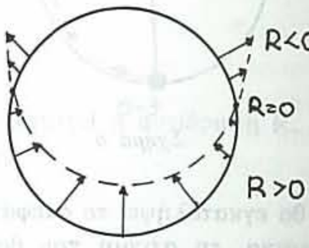
$$z_{min} = -E/mg \ (\text{επειδή} \ E = -mgz_{min})$$

άρα

$$R_{min} = \frac{2}{l}\left(E + \frac{3mg}{2} z_{min}\right) = -\frac{E}{2l} \begin{cases} R_{min} > 0, \text{ αν } E < 0 \\ R_{min} < 0, \text{ αν } E > 0 \end{cases}$$



Σχήμα 4



Σχήμα 5

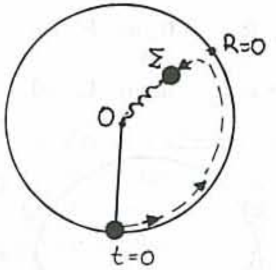
Επομένως, όταν $E < 0$ η **R** διευθύνεται προς τα μέσα σε όλη τη διάρκεια της ταλάντωσης (βλέπε στο σχήμα 4), ενώ όταν $0 < E < mgl$ η R μετά από τη θέση z* αλλάζει φορά όπως φαίνεται στο σχήμα 5.

γ) Ασυμπτωτική κίνηση προς το Β (Ε = mgl)

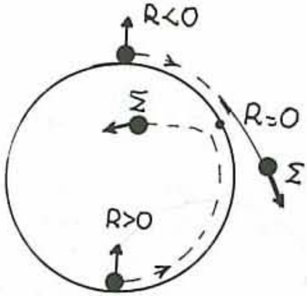
Όπως είναι φανερό, καθώς το σώμα τείνει στο Β η **R** αλλάζει φορά στη θέση z*. Η περίπτωση αυτή μοιάζει με αυτή που φαίνεται στο σχήμα 3.

Παρατήρηση. Στο πρόβλημα αυτό υποθέσαμε ότι το σώμα Σ δεν μπορεί να ξεφύγει από την περιφέρεια, δηλ. ότι $r = l$. Αυτό συμβαίνει π.χ. όταν το Σ συνδέεται με το σημείο Ο με ένα στερεό ραβδί ΟΣ = l, όταν το Σ είναι δακτυλίδι περασμένο από κυκλικό σύρμα ή είναι σφαίρα που γλυστράει μέσα σε κυκλικό σωλήνα κ.λ.π. Υπάρχουν περιπτώσεις που το Σ μπορεί να ξεφύγει από την περιφέρεια, π.χ. όταν το Σ συνδέεται με το Ο με ένα μη εκτατό νήμα τότε είναι $r \leqslant l$, δηλ. το νήμα μπορεί να μαζευτεί και το Σ να κινηθεί μέσα στην περιφέρεια. Έτσι στις περιπτώσεις των σχημάτων 3 και 5 καθώς το Σ ανεβαίνει, το νήμα παραμένει τεντωμένο ($R > 0$) και όταν φτάσει στη θέση z* η τάση στο νήμα μηδενίζεται ($R = 0$) και το νήμα είναι μόλις τεντωμένο. Αμέσως μετά τη θέση z* το νήμα δεν μπορεί να μένει τεντωμένο (αφού στις θέσεις αυτές είναι $R < 0$. Το νήμα μόνο έλξη μπορεί να ασκήσει στο Σ και όχι άπωση, δηλ. μόνο $R \geqslant 0$ και όχι $R < 0$). Γι' αυτό, το Σ εγκαταλείπει την περιφέρεια στο σημείο z* και πέφτει προς το εσωτερικό της ($r < l$) όπως φαίνεται στο σχήμα 6.

Παρόμοια είναι η περίπτωση που το Σ είναι όχημα που γλυστράει στο εξωτερικό ($r \geqslant l$) ή στο εσωτερικό ($r \leqslant l$) μέρος ενός κυκλικού στεφανιού.



Σχήμα 6

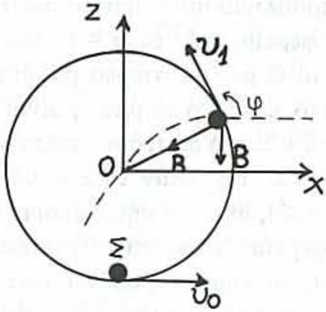


Σχήμα 7

Το Σ θα εγκαταλήψει το στεφάνι πέφτοντας προς τα έξω ή προς τα μέσα, αντίστοιχα, τη στιγμή που θα μηδενιστεί η αντίδραση του στεφανιού (βλέπε στο σχήμα 7 και στην επόμενη άσκηση).

12) Υλικό σημείο Σ εκτοξεύεται από το κατώτατο σημείο ενός λείου κατακόρυφου κυκλικού στεφανιού και κινείται στην εσωτερική πλευρά του στεφανιού. Πόση πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητα του $υ_0$ ώστε να εγκαταλείψει το στεφάνι και κατόπιν να περάσει από το κέντρο του;

Λύση



Η κεντρομόλα δύναμη προέρχεται από την αντίδραση **R** του στεφανιού και την ακτινική συνιστώσα $mgσυνϑ = mg(z/α)$ του βάρους, δηλ. είναι

$$\frac{mυ^2}{α} = R + mg\,\frac{z}{α} \qquad (1)$$

όπου α είναι η ακτίνα του στεφανιού και R η αλγεβρική τιμή της αντίδρασης. Το ολοκλήρωμα της ενέργειας είναι

$$\frac{1}{2}\, m\upsilon^2 + mgz = \frac{1}{2}\, m\upsilon_0^2 - mg\alpha \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$R = m\alpha^{-1}(\upsilon_0^2 - 2g\alpha - 3gz) \tag{3}$$

Το Σ θα εγκαταλείψει το στεφάνι όταν μηδενιστεί η αντίδραση R. Αυτό συμβαίνει, σύμφωνα με την (3), στη θέση

$$z_1 = (\upsilon_0^2 - 2g\alpha)/3g \tag{4}$$

(με την προϋπόθεση βέβαια ότι είναι $z_1 < \alpha$ ή, σύμφωνα με την 4, $\upsilon_0^2 < 5g\alpha$). Αντικαθιστώντας την (4) στην (2) βρίσκουμε ότι η ταχύτητα του Σ στη θέση z_1 είναι ίση με

$$\upsilon_1^2 = gz_1 \tag{5}$$

(Παρατηρούμε από την (5) ότι είναι $z_1 > 0$).

Αφού το Σ εγκαταλείψει το στεφάνι, κινείται πάνω σε παραβολική τροχιά που υπακούει στις γνωστές (από την πλάγια βολή) εξισώσεις

$$x = x_1 + \upsilon_1 t\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad z = z_1 + \upsilon_1 t\eta\mu\varphi - gt^2/2$$

Για να περνάει η τροχιά από την αρχή O των αξόνων, πρέπει λοιπόν να υπάρχει μια τιμή του t που να ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$0 = x_1 + \upsilon_1 t\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad 0 = z_1 + \upsilon_1 t\eta\mu\varphi - gt^2/2 \tag{6}$$

Απαλοίφοντας το t ανάμεσα στις (6) βρίσκουμε

$$z_1 - x_1\varepsilon\varphi\varphi - \frac{gx_1^{\,2}}{2\upsilon_1^{\,2}\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = 0 \tag{7}$$

Ισχύουν οι σχέσεις

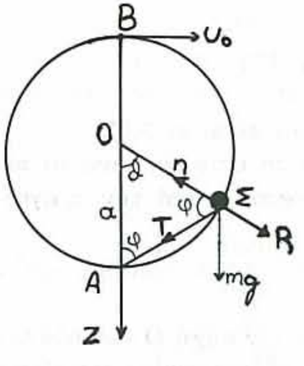
$$\varepsilon\varphi\varphi = -x_1/z_1, \quad \sigma\upsilon\nu^2\varphi = z_1^2/(x_1^2 + z_1^2), \quad \upsilon_1^2 = gz_1, \quad x_1^2 = \alpha^2 - z_1^2$$

Επομένως η (7) γίνεται $z_1 = \alpha/\sqrt{3}$. Αντικαθιστώντας το z_1 στην (4) βρίσκουμε

$$\upsilon_0^2 = g\alpha(2 + \sqrt{3})$$

13) Υλικό σημείο Σ με μάζα $m = 1$ είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω σε λεία κατακόρυφη περιφέρεια κύκλου με ακτίνα α. Το Σ συνδέεται με το κατώτατο σημείο Α της περιφέρειας με μια ελαστική ταινία που έχει φυσικό μήκος α και μέτρο $\lambda = mg = g$. Αρχικά το Σ βρίσκεται στο ανώτατο σημείο Β της περιφέρειας και έχει ταχύτητα $\upsilon_0 = \sqrt{g\alpha/2}$. Να βρεθεί η ταχύτητα του Σ όταν φτάσει στο Α και να αποδειχθεί ότι η αντίδραση R της περιφέρειας αρχικά διευθύνεται προς τα έξω και όταν το Σ φτάσει στη θέση $\vartheta = \text{τοξσυν}(11/12)$ αρχίζει να διευθύνεται προς τα μέσα.

Λύση



$\vartheta = \pi - 2\varphi$

Η έλξη που εξασκεί η ελαστική ταινία στο Σ είναι ίση με

$$T = (\lambda/\alpha)(\text{ΑΣ} - \alpha) = (g/\alpha)(2\alpha\text{συν}\varphi - \alpha) \tag{1}$$

Η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στην έλξη της ταινίας είναι

$$V_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{\alpha}\,(\text{ΑΣ} - \alpha)^2 = \frac{g}{2\alpha}\,(2\alpha\text{συν}\varphi - \alpha)^2$$

και η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στη βαρύτητα είναι (αν την μετρήσουμε από το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το Β)

$$V_2 = -g(\alpha + \alpha\text{συν}\vartheta) = -g\alpha(1 + \text{συν}\vartheta)$$

Η συνολική δυναμική ενέργεια του Σ είναι $V = V_1 + V_2$. Άρα, το ολοκλήρωμα της ενέργειας είναι

$$\frac{1}{2}\,\upsilon^2 + \frac{g}{2\alpha}\,(2\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi - \alpha)^2 - g\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\vartheta) = \sigma\tau\alpha\vartheta. \equiv E \qquad (2)$$

Στη θέση Β είναι $\upsilon^2 = g\alpha/2$, $\vartheta = \pi$, $\varphi = 0$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (2), η σταθερή Ε προκύπτει ίση με

$$E = 3g\alpha/4 \qquad (3)$$

Όταν το Σ φτάσει στο Α είναι $\vartheta = 0$, $\varphi = \pi/2$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές, καθώς και την (3), στην (2) και λύνοντας ως προς υ βρίσκουμε ότι η ταχύτητα στη θέση Α είναι ίση με

$$\upsilon_A = \sqrt{13g\alpha/2}$$

Η Δ.Ε της κίνησης είναι

$$m\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{R} = \mathbf{g} + \mathbf{T} + R\mathbf{n} \qquad (4)$$

όπου $\mathbf{n}$ είναι διανυσματική μονάδα κάθετη στην περιφέρεια όπως φαίνεται στο σχήμα και $\mathbf{R} = R\mathbf{n}$ είναι η αντίδραση της περιφέρειας. Πολ/ζοντας την (4) επί $\mathbf{n}$ βρίσκουμε

$$\upsilon^2/\alpha = -g\sigma\upsilon\nu\vartheta + T\sigma\upsilon\nu\varphi + R$$

Άρα

$$R = \upsilon^2/\alpha + g\sigma\upsilon\nu\vartheta - T\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (5)$$

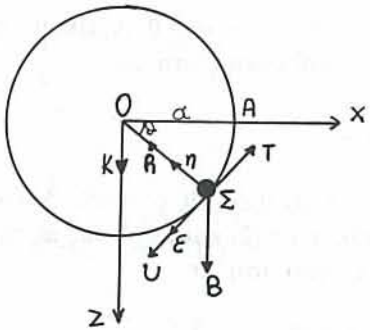
Αντικαθιστώντας το υ^2 από τις (2), (3), το Τ από την (1) και παίρνοντας υπόψη ότι $\vartheta = \pi - 2\varphi$, η (5) γίνεται

$$R = -(g/2)(12\sigma\upsilon\nu\varphi - 11)(2\sigma\upsilon\nu\varphi + 1)$$

Για $\varphi = 0$ (σημείο Β) είναι $R = -3g/2 < 0$, δηλ. η αντίδραση στο Β διευθύνεται προς τα έξω. Για $\varphi = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(11/12)$ είναι $R = 0$. Για $\varphi = \pi/2$ (σημείο Α) είναι $R = 11g/2 > 0$, δηλ. η αντίδραση διευθύνεται προς τα μέσα.

14) Υλικό σημείο Σ κινείται με την επίδραση του βάρους του και της τριβής πάνω σε κατακόρυφη περιφέρεια κύκλου. Αρχικά βρίσκεται στο ένα άκρο Α της οριζόντιας διαμέτρου και έχει μηδενική ταχύτητα. Καθώς πέφτει, φτάνει στο κατώτατο σημείο με μηδενική ταχύτητα. Να βρεθεί ο συντελεστής τριβής f.

Λύση



Η Δ.Ε της κίνησης είναι

$$m\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B} + \mathbf{R} \tag{1}$$

Αν $\mathbf{n}$ και $\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά την κάθετη και την εφαπτομένη της τροχιάς στο Σ (όπως φαίνεται στο σχήμα), η επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}$, η αντίδραση $\mathbf{R}$ και το βάρος $\mathbf{B}$ γράφονται με τη μορφή

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_n\mathbf{n} + \gamma_t\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha\dot{\vartheta}^2\mathbf{n} + \alpha\ddot{\vartheta}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2}$$

$$\mathbf{R} = R_n\mathbf{n} - T\boldsymbol{\varepsilon} = R_n\mathbf{n} - fR_n\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3}$$

$$\mathbf{B} = mg\mathbf{k} = mg(\sigma\upsilon\nu\vartheta\boldsymbol{\varepsilon} - \eta\mu\vartheta\mathbf{n}) \tag{4}$$

όπου $T = fR_n$ είναι η τριβή.

Αντικαθιστώντας τις (2)-(4) στην (1) και παίρνοντας τις προβολές κατά τις διευθύνσεις των $\mathbf{n}$ και $\boldsymbol{\varepsilon}$ βρίσκουμε

$$m\alpha\dot{\vartheta}^2 = -mg\eta\mu\vartheta + R_n, \quad m\alpha\ddot{\vartheta} = mg\sigma\upsilon\nu\vartheta - fR_n \tag{5}$$

Απαλοίφοντας την R_n από τις (5) βρίσκουμε

$$\alpha\ddot{\vartheta} = g\sigma\upsilon\nu\vartheta - f(\alpha\dot{\vartheta}^2 + g\eta\mu\vartheta) \tag{6}$$

Εκτελώντας την αντικατάσταση

$$p = \dot{\vartheta}^2, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = 2\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} \Rightarrow \ddot{\vartheta} = \frac{1}{2}\frac{dp}{d\vartheta}$$

η Δ.Ε (6) μετατρέπεται στην ακόλουθη γραμμική Δ.Ε

$$\frac{dp}{d\vartheta} + 2fp = \frac{2g}{l}(\sigma\upsilon\nu\vartheta - f\eta\mu\vartheta) \tag{7}$$

Η γενική λύση της (7) είναι (σύμφωνα με το γενικό τύπο που ισχύει για τις γραμμικές Δ.Ε πρώτης τάξης)

$$p = \dot{\vartheta}^2 = 2gl^{-1}(1 + 4f^2)^{-1}[3f\sigma\upsilon\nu\vartheta + (1 - 2f^2)\eta\mu\vartheta] + ce^{-2f\vartheta} \tag{8}$$

όπου η σταθερή c θα βρεθεί από τις αρχικές συνθήκες. Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες $\vartheta = 0$, $\dot{\vartheta} = 0$ στην (8) βρίσκουμε

$$c = -6fgl^{-1}(1 + 4f^2)^{-1} \tag{9}$$

Για να βρούμε το συντελεστή τριβής αντικαθιστούμε στην (8) τις «τελικές» συνθήκες $\vartheta = \pi/2$, $\dot{\vartheta} = 0$ και παίρνοντας υπόψη την (9) βρίσκουμε

$$\frac{1 - 2f^2}{3f} - e^{-\pi f} = 0 \tag{10}$$

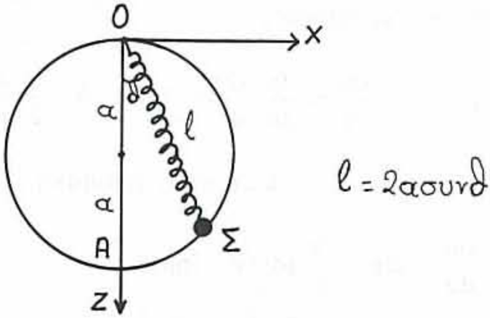
Η (10) είναι μια υπερβατική εξίσωση ως προς f. Έχει μια μόνο θετική ρίζα περίπου ίση με 0.6.

√ 15) Υλικό σημείο Σ έχει μάζα m και είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω σε λεία κατακόρυφη περιφέρεια με ακτίνα α. Το Σ συνδέεται με το ανώτατο σημείο O της περιφέρειας με ένα ελατήριο που έχει σταθερή k και φυσικό μήκος l_0. Να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας και η ευστάθειά τους όταν $l_0 = \alpha$ και $k = mg/\alpha$ ή $k = 3mg/\alpha$.

Λύση

Η δυναμική ενέργεια του Σ οφείλεται στη βαρύτητα και στο ελατήριο και είναι ίση με (επειδή $z = l\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $l = 2\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta$)

$$V = -mgz + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = -mg(2\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta)\sigma\upsilon\nu\vartheta + \frac{k}{2}(2\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta - l_0)^2$$



Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται σε εκείνες τις θέσεις ϑ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$V'(\vartheta) = dV/d\vartheta = 2\alpha\eta\mu\vartheta(kl_0 - 2k\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta + 2mg\sigma\upsilon\nu\vartheta) = 0 \qquad (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι

$$\eta\mu\vartheta = 0 \quad \acute{\eta} \quad \sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{kl_0}{2(\alpha k - mg)} \qquad (2)$$

Η πρώτη εξίσωση από τις (2) μας λέει ότι το σημείο $\vartheta = 0$, δηλ. το κατώτατο σημείο Α, είναι σημείο ισορροπίας. Αν $0 < \vartheta < \pi/2$, η δεύτερη εξίσωση (2) ικανοποιείται με την προϋπόθεση ότι ισχύει ο περιορισμός

$$0 < \frac{kl_0}{2(\alpha k - mg)} < 1$$

ή ο ισοδύναμος περιορισμός

$$\alpha k > (mg + kl_0/2) \qquad (3)$$

Επομένως, όταν ισχύει ο περιορισμός (3) υπάρχει και δεύτερο σημείο ισορροπίας που η θέση του ϑ^* ικανοποιεί τη δεύτερη εξίσωση από τις (2).

α) **Περίπτωση $l_0 = \alpha$, $k = mg/\alpha$.** Στην περίπτωση αυτή ο περιορισμός (3) δεν ικανοποιείται και γιαυτό δεν υπάρχει άλλο σημείο ισορροπίας εκτός από το Α. Επειδή $l_0 = \alpha$, $k = mg/\alpha$, η (1) γίνεται

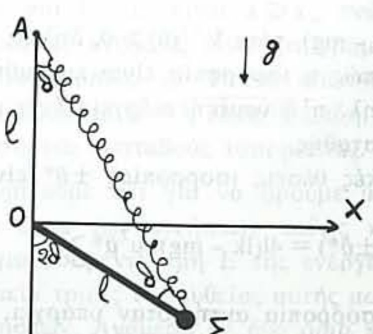
$$V'(\vartheta) = 2mg\alpha\eta\mu\vartheta \Rightarrow V''(\vartheta) = 2mg\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Στο σημείο Α είναι $\vartheta = 0$ και $V'(0) = 0$, $V''(0) = 2mg\alpha > 0$, δηλ. η δυναμική ενέργεια έχει ελάχιστο στο Α. ΄Αρα το Α είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

β) **Περίπτωση $l_0 = \alpha$, $k = 3mg/\alpha$.** Στην περίπτωση αυτή ο περιορισμός (3) ικανοποιείται και γι' αυτό υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας, το $\vartheta = 0$ (σημείο Α) και αυτό που βρίσκεται στη θέση ϑ^* που ικανοποιεί, σύμφωνα με την (2), την εξίσωση συν$\vartheta^* = 3/4$. Επίσης είναι $V'(\vartheta) = 2mg\alpha(3$ημ$\vartheta$ - - 2ημ$2\vartheta)$, $V''(0) = 2mg\alpha(3$συνϑ - 4συν$2\vartheta)$. Για $\vartheta = 0$ είναι $V'(0) = 0$ και $V''(0) = -2mg\alpha < 0$, δηλ. η δυναμική ενέργεια έχει μέγιστο στο σημείο Α. ΄Αρα το Α είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας. Για $\vartheta = \vartheta^*$ είναι $V'(\vartheta^*) = 0$ και $V''(\vartheta^*) = 3.5mg\alpha > 0$, δηλ. η δυναμική ενέργεια έχει ελάχιστο. ΄Αρα το $\vartheta^* =$ τοξσυν$(3/4)$ είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

16) Υλικό σημείο Σ με μάζα m είναι στερεωμένο στο ένα άκρο ενός στερεού ραβδιού ΟΣ το οποίο μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακίνητο οριζόντιο άξονα που περνάει από το σημείο Ο. ΄Ενα ελατήριο συνδέει το Σ με ένα ακίνητο σημείο Α που βρίσκεται πάνω από το Ο. Να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας του Σ καθώς και η ευστάθειά τους. Το ραβδί δεν έχει βάρος, το ελατήριο έχει σταθερή k φυσικό μήκος l_0 και είναι ΟΑ = ΟΣ = l.

Λύση



Η δυναμική ενέργεια του Σ οφείλεται στη βαρύτητα και στο ελατήριο και είναι ίση με

$$V = -mgz + (k/2)(A\Sigma - l_0)^2 = -mgl\text{συν}2\vartheta + (k/2)(2l\text{συν}\vartheta - l_0)^2$$

Τα σημεία ισορροπίας ϑ_i είναι ρίζες της εξίσωσης

$$V'(\vartheta) \equiv dV/d\vartheta = 2l\text{ημ}\vartheta[2(mg - lk)\text{συν}\vartheta + l_0k] = 0 \qquad (1)$$

Άρα θα είναι

$$\eta\mu\vartheta = 0 \quad \acute{\eta} \quad \sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{1}{2}\,\frac{l_0 k}{lk - mg} \tag{2}$$

Η πρώτη εξίσωση από τις (2) μας λέγει ότι το σημείο $\vartheta = 0$, δηλ. η κατώτατη θέση του Σ, είναι σημείο ισορροπίας. Επειδή $-\pi \leqslant 2\vartheta \leqslant \pi$, θα είναι $0 \leqslant \sigma\upsilon\nu\vartheta \leqslant 1$ και επομένως η δεύτερη εξίσωση από τις (2) ικανοποιείται με την προϋπόθεση ότι ισχύει ο περιορισμός

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{l_0 k}{lk - mg} \leqslant 1 \quad \acute{\eta} \quad \frac{l_0 k}{2} \leqslant lk - mg \tag{3}$$

Επομένως, όταν ισχύει ο περιορισμός (3), υπάρχουν δύο άλλες συμμετρικές θέσεις $\pm\vartheta^*$ ισορροπίας που ικανοποιούν τη δεύτερη από τις (2). Για να εξετάσουμε την ευστάθεια υπολογίζουμε την ποσότητα $V''(\vartheta) = 2l\sigma\upsilon\nu\vartheta\,[2(mg - lk)\sigma\upsilon\nu\vartheta + l_0 k] + 4l(kl - mg)\eta\mu^2\vartheta$

Στη θέση ισορροπίας $\vartheta = 0$ είναι

$$V''(0) = 2l[l_0 k - 2(lk - mg)]$$

Άρα, αν $l_0 k > 2(lk - mg)$, τότε $V''(0) > 0$, δηλ. η δυναμική ενέργεια έχει ελάχιστο και συνεπώς η ισορροπία είναι ευσταθής. Αν $l_0 k < 2(lk - mg)$, τότε $V''(0) < 0$, δηλ. η δυναμική ενέργεια έχει μέγιστο και συνεπώς η ισορροπία είναι ασταθής.

Στις συμμετρικές θέσεις ισορροπίας $\pm\vartheta^*$ είναι

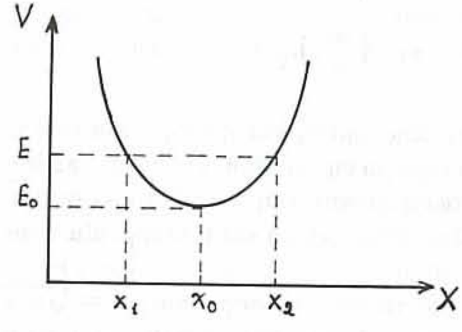
$$V''(\pm\vartheta^*) = 4l(lk - mg)\eta\mu^2\vartheta^* > 0$$

Επομένως η ισορροπία αυτή, όταν υπάρχει, είναι ευσταθής.

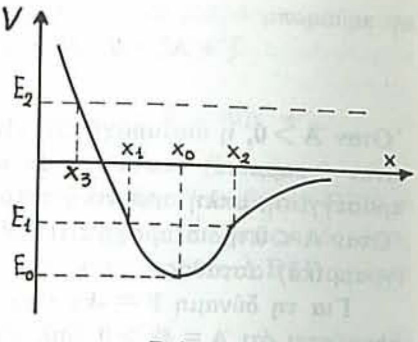
17) Υλικό σημείο κινείται πάνω στον άξονα x με την επίδραση της δύναμης $F = -kx + \alpha x^{-3}$ $(k > 0,\ \alpha > 0)$. Να βρεθούν α) τα όρια των κινήσεων για τυχαίες τιμές της ενέργειας και β) τα σημεία ισορροπίας και η ευστάθειά τους. Να γίνει το ίδιο και για την περίπτωση που η δύναμη είναι $F = 6\alpha x^{-7} - 12bx^{-13}$ $(\alpha > 0,\ b > 0)$.

Λύση

Είναι $V(x) = -\int F(x)dx = kx^2/2 + \alpha/2x^2$. Η γραφική παράσταση της $V(x)$ για $x > 0$ φαίνεται στο σχήμα 1. Παρατηρούμε ότι όλες οι κινήσεις



Σχήμα 1



Σχήμα 2

είναι περατωμένες, δηλ. είναι μη-γραμμικές ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας x_0. Το x_0 ικανοποιεί την εξίσωση $F(x_0) = -kx_0 + \alpha x_0^{-3} = 0$, οπότε $x_0 = \sqrt[4]{\alpha/k}$. Παρατηρούμε επίσης ότι στο x_0 η $V(x)$ έχει ελάχιστο. Άρα το x_0 είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

Στην περίπτωση της δεύτερης δύναμης είναι $V(x) = -\alpha x^{-6} + bx^{-12}$. Η γραφική παράσταση της $V(x)$ για $x > 0$ φαίνεται στο σχήμα 2. Παρατηρούμε ότι οι κινήσεις που αντιστοιχούν σε αρνητική ενέργεια είναι περατωμένες ενώ οι κινήσεις που αντιστοιχούν σε μηδενική ή θετική ενέργεια δεν είναι περατωμένες (π.χ. για $E = E_2$ είναι $x \geqslant x_3$, ενώ για $E = E_1$ είναι $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$). Οι περατωμένες κινήσεις είναι μη-γραμμικές ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας x_0. Το x_0 ικανοποιεί την εξίσωση $F(x_0) = 6\alpha x_0^{-7} - 12bx_0^{-13} = 0$, οπότε $x_0 = \sqrt[6]{2b/\alpha}$. Επειδή στο x_0 η $V(x)$ έχει ελάχιστο, το x_0 είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

Παρατήρηση 1. Θυμίζουμε ότι για να βρούμε με τη βοήθεια του διαγράμματος $V - x$ τα όρια των κινήσεων καθώς και τις επιτρεπτές περιοχές του άξονα x για δοσμένη τιμή E της ενέργειας, φέρνουμε την ευθεία $V(x) = E$. Τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με την καμπύλη $V(x)$ δίνουν τα όρια των κινήσεων. Ανάμεσα σε δύο όρια x_1 και x_2 η κίνηση είναι επιτρεπτή όταν η καμπύλη $V(x)$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία E (δηλ. όταν $V(x) < E$ στο διάστημα x_1, x_2) και απαγορευμένη όταν συμβαίνει το αντίθετο (δηλ. $V(x) > E$).

Παρατήρηση 2. Η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας θα μπορούσε να βρεθεί και με τη μέθοδο των διαταραχών. Αν $x(t) = x_0 + \xi(t)$ είναι η κίνηση που προκύπτει από μικρή διαταραχή της ισορροπίας στο σημείο x_0, τότε η Δ.Ε της κίνησης γίνεται σε πρώτη προσέγγιση

$$m\ddot{x} = m\ddot{\xi} = F(x_0 + \xi) = F(x_0) + \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 \xi + \ldots \simeq \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 \xi$$

ή

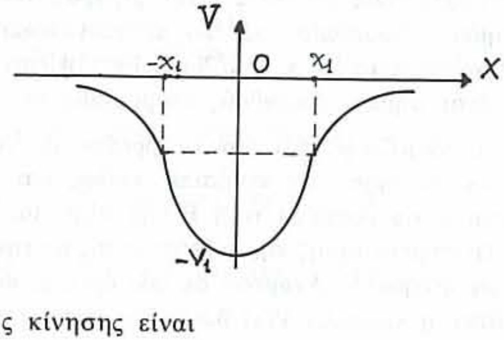
$$\ddot{\xi} + A\xi = 0 \quad \text{όπου} \quad A = m^{-1}\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x_0}$$

Όταν $A > 0$, η διαταραχή $\xi(t)$ είναι περατωμένη και η ισορροπία στο x_0 είναι (γραμμικά) ευσταθής. Η διαταραγμένη κίνηση είναι, σε πρώτη προσέγγιση, απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{A}$. Όταν $A < 0$ η διαταραχή $\xi(t)$ δεν είναι περατωμένη και η ισορροπία είναι (γραμμικά) ασταθής.

Για τη δύναμη $F = -kx + \alpha x^{-3}$ και το σημείο ισορροπίας $x_0 = \sqrt[4]{\alpha/k}$ προκύπτει ότι $A = 4k > 0$, δηλ. ότι η ισορροπία είναι ευσταθής και ότι η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων γύρω της είναι $\omega = 2\sqrt{k}$. Για τη δύναμη $F = 6\alpha x^{-7} - 12bx^{-12}$ και το σημείο ισορροπίας $x_0 = \sqrt[6]{2b/\alpha}$ προκύπτει επίσης ότι $A > 0$.

18) Υλικό σημείο Σ κινείται πάνω στον άξονα x με την επίδραση δύναμης που προέρχεται από το δυναμικό $V(x) = -V_1 e^{-\alpha x^4}$ $(V_1 > 0)$. Να αποδειχθεί ότι οι ταλαντώσεις μικρού πλάτους γύρω από το σημείο ισορροπίας $x = 0$ δεν είναι απλές αρμονικές.

Λύση



Η Δ.Ε της κίνησης είναι

$$m\ddot{x} = F(x) = -dV/dx = -4V_1\alpha x^3 e^{-\alpha x^4} \tag{1}$$

Η γραφική παράσταση της $V(x)$ φαίνεται στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι η $V(x)$ έχει ελάχιστο για $x = 0$, δηλ. ότι η αρχή Ο είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Παρατηρούμε επίσης ότι όλες οι κινήσεις που αντιστοιχούν σε αρνητική ενέργεια $(-V_1 < E < 0)$ είναι περατωμένες ενώ οι κινήσεις που αντιστοιχούν σε μη-αρνητική ενέργεια $(E \geqslant 0)$ δεν είναι περατωμένες. Οι περατωμένες κινήσεις είναι ταλαντώσεις, με όρια $\pm x_1$, γύρω από το Ο.

΄Οταν το πλάτος x των ταλαντώσεων είναι αρκετά μικρό μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor την F(x), δηλ.

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}\,F''(0)x^2 + \frac{1}{6}\,F'''(0)x^3 + ...$$

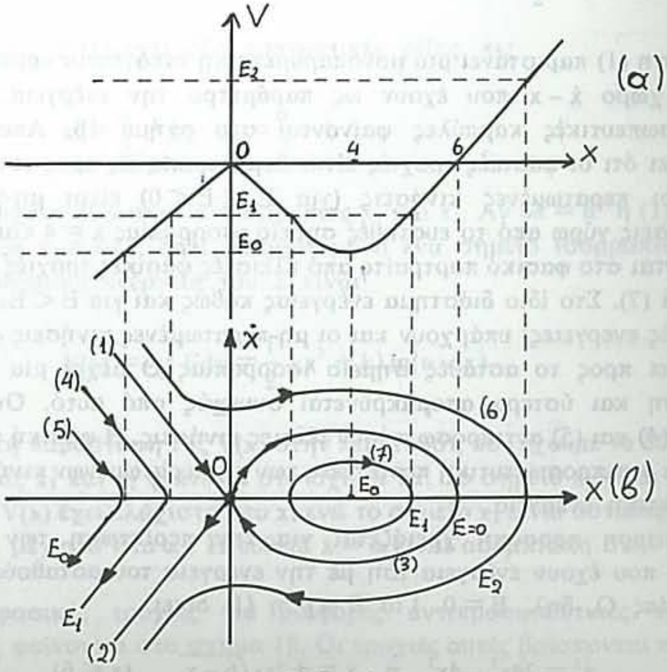
και να κρατήσουμε μόνο τους πρώτους όρους. Εδώ είναι $F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$ και $F'''(0) = -24V_1\alpha$. ΄Ωστε ο πρώτος μη-μηδενικός όρος είναι ο όρος τρίτης τάξης (x^3) και κρατώντας μόνο αυτόν η Δ.Ε (1) γίνεται

$$m\ddot{x} = F(x) \simeq -(4\alpha V_1/m)x^3 \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι η (2) είναι μια μη-γραμμική Δ.Ε. Επομένως, παρόλο που το πλάτος των ταλαντώσεων είναι μικρό, η κίνηση δεν είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

19) Να σχεδιαστεί το φασικό πορτραίτο στην περίπτωση ενός υλικού σημείου Σ με μάζα m = 1 που κινείται πάνω στον άξονα x με την επίδραση της δύναμης $F = 24x - 6x^2$.

Λύση



Σχήμα 1

Η δύναμη μηδενίζεται για $x = 0$ και $x = 4$. Υπάρχουν λοιπόν δύο σημεία ισορροπίας ($x = 0$ και $x = 4$). Η δυναμική ενέργεια του Σ είναι

$$V(x) = -\int F dx = -12x^2 + 2x^3$$

Η γραφική παράσταση της $V(x)$ φαίνεται στο σχήμα 1α. Το σημείο ισορροπίας $x=0$ είναι ασταθές επειδή η $V(x)$ έχει μέγιστο για $x = 0$ ενώ το σημείο ισορροπίας $x = 4$ είναι ευσταθές επειδή η $V(x)$ έχει ελάχιστο για $x = 4$.

Από το σχήμα 1α παρατηρούμε ότι: α) για $E_0 \leqslant E < 0$ όλες οι κινήσεις που ξεκινούν από το διάστημα $0 < x_0 < 6$ είναι περατωμένες ενώ όλες όσες ξεκινούν από το διάστημα $x_0 < 0$ δεν είναι περατωμένες (η απόσταση $|x|$ παρουσιάζει ελάχιστο όχι όμως και μέγιστο) β) για $E > 0$ όλες οι κινήσεις δεν είναι περατωμένες (η $|x|$ παρουσιάζει μόνο μέγιστο).

Από το διάγραμμα της δυναμικής ενέργειας προκύπτει το φασικό πορτραίτο που φαίνεται στο σχήμα 1β. Όπως είναι γνωστό, οι φασικές τροχιές βρίσκονται πάνω στις ισοενεργειακές καμπύλες, δηλ. στις καμπύλες

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - 12x^2 + 2x^3 \quad \text{ή} \quad \dot{x}^2 = 24x^2 - 4x^3 + E \tag{1}$$

Η εξίσωση (1) παριστάνει μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων στο φασικό χώρο $\dot{x} - x$ που έχουν ως παράμετρο την ενέργεια. Μερικές αντιπροσωπευτικές καμπύλες φαίνονται στο σχήμα 1β. Από την (1) προκύπτει ότι οι φασικές τροχιές είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x. Όλες οι περατωμένες κινήσεις (για $E_0 \leqslant E < 0$) είναι μη-γραμμικές ταλαντώσεις γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας $x = 4$ και αντιπροσωπεύονται στο φασικό πορτραίτο από κλειστές φασικές τροχιές όπως π.χ. η τροχιά (7). Στο ίδιο διάστημα ενέργειας καθώς και για $E < E_0$ (δηλ. για αρνητικές ενεργειες) υπάρχουν και οι μη-περατωμένες κινήσεις όπου το Σ πλησιάζει προς το ασταθές σημείο ισορροπίας Ο μέχρι μία ελάχιστη απόσταση και ύστερα απομακρύνεται συνεχώς από αυτό. Οι φασικές τροχιές (4) και (5) αντιπροσωπεύουν τέτοιες κινήσεις. Η φασική τροχιά (6) είναι μια αντιπροσωπευτική περίπτωση των μη-περατωμένων κινήσεων που έχουν θετική ενέργεια.

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται για την περίπτωση των φασικών τροχιών που έχουν ενέργεια ίση με την ενέργεια του ασταθούς σημείου ισορροπίας Ο, δηλ. $E = 0$. Για $E = 0$ η (1) δίνει

$$\dot{x}^2 = 24x^2 - 4x^3 \quad \text{ή} \quad \dot{x} = \pm 2x\sqrt{6 - x} \qquad (x \leqslant 6) \tag{2}$$

Η ισοενεργειακή καμπύλη (2) ονομάζεται **διαχωριστική καμπύλη** και πάνω σ' αυτή βρίσκονται τέσσερις φασικές τροχιές: α) η αρχή Ο των φασικών αξόνων που αντιπροσωπεύει το σημείο ισορροπίας $x = \dot{x} = 0$, β) οι τροχιές (1) και (2) που η μια είναι συμμετρική της άλλης. Η τροχιά (1) τείνει στο Ο για $t \to \infty$ ενώ η (2) τείνει στο Ο για $t \to -\infty$ (απομακρύνεται συνεχώς από το Ο καθώς αυξάνει ο χρόνος) και γ) η τροχιά (3) που έχει τη μορφή θηλειάς και τείνει στο Ο για $t \to \pm\infty$.

Η καμπύλη (2) ονομάστηκε διαχωριστική επειδή διαχωρίζει τις κλειστές φασικές τροχιές, δηλ. τις περιοδικές κινήσεις (περατωμένες), από τις ανοικτές τροχιές, δηλ. τις μη-περιοδικές (μη-περατωμένες) κινήσεις. Όλες οι κλειστές τροχιές περιέχονται μέσα στη θηλειά (3).

20) Να σχεδιαστεί το φασικό πορτραίτο στην περίπτωση υλικού σημείου Σ που κινείται πάνω στον άξονα x με την επίδραση της δύναμης $F(x,\lambda) = -kx + k\lambda/(\alpha - x)$ όπου k, α είναι θετικές σταθερές και λ είναι παράμετρος.

Λύση

Η δύναμη μηδενίζεται όταν

$$-kx + k\lambda/(\alpha - x) = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - \alpha x + \lambda = 0 \tag{1}$$

Αν $4\lambda < \alpha^2$, η (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις

$$x_1 = \frac{\alpha}{2} - b, \quad x_2 = \frac{\alpha}{2} + b$$

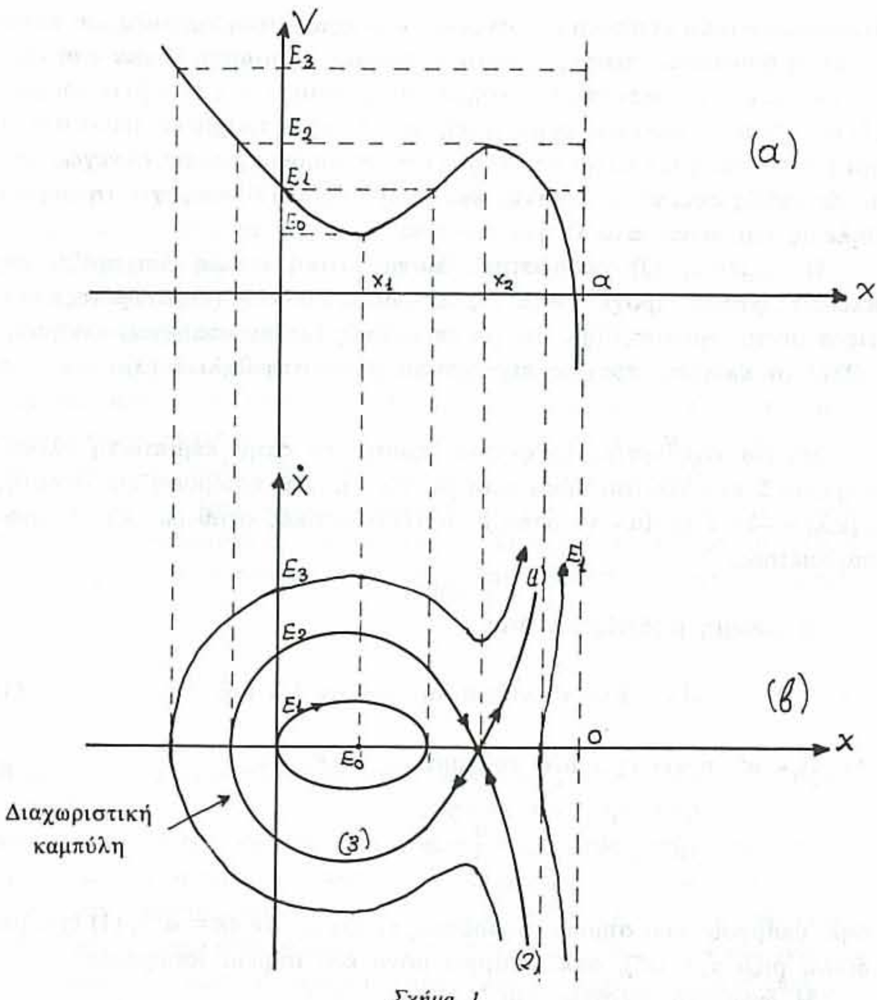
δηλ. υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας x_1 και x_2. Αν $4\lambda = \alpha^2$ η (1) έχει μια διπλή ρίζα $x_3 = \alpha/2$, δηλ. υπάρχει μόνο ένα σημείο ισορροπίας.

Η δυναμική ενέργεια του Σ είναι

$$V(x) = -\int F dx = \frac{1}{2} kx^2 + k\lambda \ln(\alpha - x) \tag{2}$$

Η γραφική παράσταση της V(x) στην περίπτωση που έχουμε τα δύο σημεία ισορροπίας x_1 και x_2 φαίνεται στο σχήμα 1α. Το σημείο x_1 είναι ευσταθές επειδή η V(x) έχει ελάχιστο στο x_1 ενώ το σημείο x_2 είναι ασταθές επειδή η V(x) έχει μέγιστο στο x_2. Η ευθεία $x = \alpha$ είναι ασύμπτωτη στην καμπύλη V(x).

Οι φασικές τροχιές για διάφορες αντιπροσωπευτικές τιμές της ενέργειας φαίνονται στο σχήμα 1β. Οι τροχιές αυτές βρίσκονται πάνω στις



Σχήμα 1

ισοενεργειακές καμπύλες, δηλ. στις καμπύλες που έχουν εξίσωση

$$\frac{1}{2}\, m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, kx^2 + k\lambda \ln(\alpha - x) = E \qquad (3)$$

Παρατηρούμε ότι η ευθεία $x = \alpha$ είναι ασύμπτωτη και για τις καμπύλες αυτές (αφού για $x \to \alpha$ είναι $d\dot{x}/dx \to \infty$).

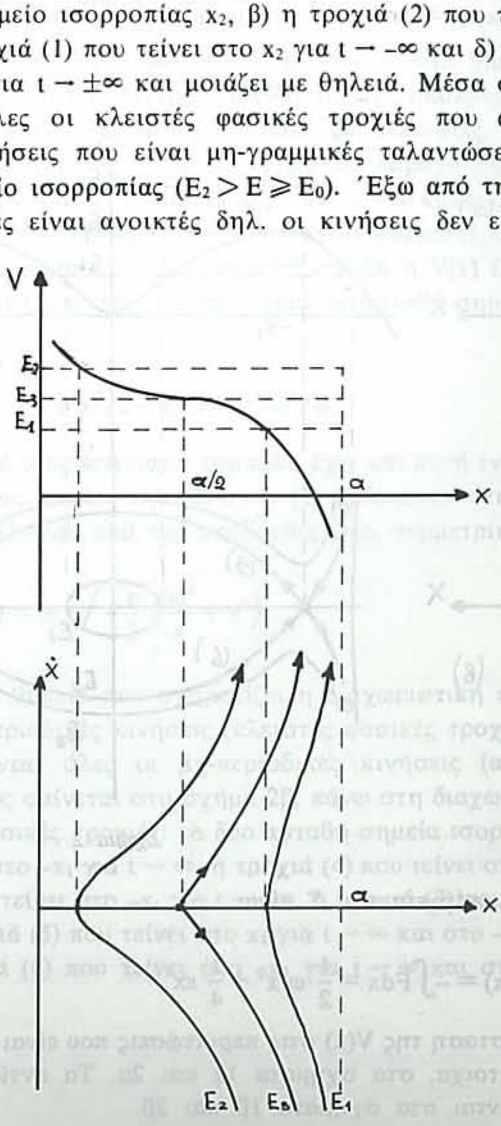
Το ασταθές σημείο ισορροπίας x_2 έχει ενέργεια ίση με

$$E_2 = \frac{1}{2}\, kx_2^2 + k\lambda \ln(\alpha - x_2)$$

Η διαχωριστική καμπύλη έχει και αυτή ενέργεια ίση με E_2. Αντικαθιστώντας το E_2 στην (3) βρίσκουμε ότι η εξίσωση της διαχωριστικής καμπύλης είναι

$$\frac{1}{2}\, m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, k(x^2 - x_2^2) + k\lambda \ln\, \frac{\alpha - x}{x_1} = 0$$

Πάνω στη διαχωριστική καμπύλη βρίσκονται τέσσερις φασικές τροχιές: α) το ασταθές σημείο ισορροπίας x_2, β) η τροχιά (2) που τείνει στο x_2 για $t \to \infty$ γ) η τροχιά (1) που τείνει στο x_2 για $t \to -\infty$ και δ) η τροχιά (3) που τείνει στο x_2 για $t \to \pm\infty$ και μοιάζει με θηλειά. Μέσα στη θηλειά αυτή περιέχονται όλες οι κλειστές φασικές τροχιές που αντιστοιχούν σε περιοδικές κινήσεις που είναι μη-γραμμικές ταλαντώσεις γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας ($E_2 > E \geqslant E_0$). Έξω από τη θηλειά όλες οι φασικές τροχιές είναι ανοικτές δηλ. οι κινήσεις δεν είναι περιοδικές.

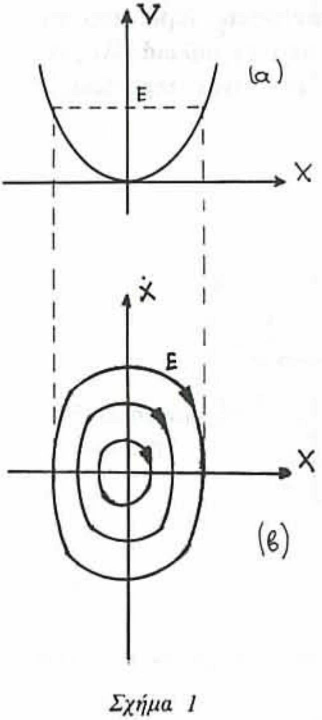


Σχήμα 2

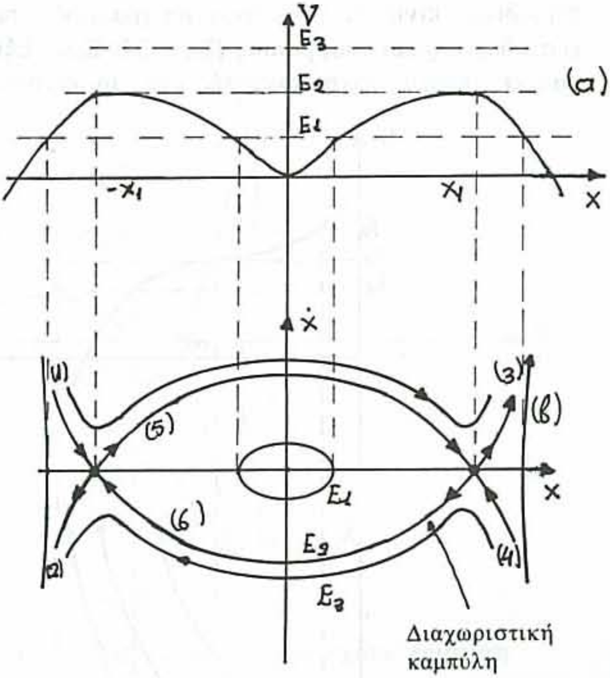
Στην περίπτωση που υπάρχει μόνο ένα σημείο ισορροπίας $x_3 = \alpha/2$ η γραφική παράσταση της V(x) και το αντίστοιχο φασικό διάγραμμα φαίνονται στο σχήμα 2. Παρατηρούμε ότι το x_3 είναι ασταθές και ότι δεν υπάρχουν περιοδικές κινήσεις.

21) Να σχεδιαστεί το φασικό πορτραίτο στην περίπτωση ενός υλικού σημείου Σ με μάζα m = 1 που κινείται πάνω στον άξονα x με την επίδραση της δύναμης $F(x,\varepsilon) = -\omega^2 x - \varepsilon x^3$ όπου ω^2 είναι σταθερή και ε είναι παράμετρος.

Λύση



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Η δυναμική ενέργεια του Σ είναι

$$V(x) = -\int F dx = \frac{1}{2}\,\omega^2 x^2 + \frac{1}{4}\,\varepsilon x^4 \tag{1}$$

Η γραφική παράσταση της V(x) στις περιπτώσεις που είναι $\varepsilon > 0$ και $\varepsilon < 0$ φαίνονται, αντίστοιχα, στα σχήματα 1α και 2α. Τα αντίστοιχα φασικά πορτραίτα φαίνονται στα σχήματα 1β και 2β.

α) Περίπτωση $\varepsilon > 0$. Από το σχήμα 1α παρατηρούμε ότι όλες οι κινήσεις είναι περατωμένες. Οι κινήσεις είναι περιοδικές, δηλ. μη-γραμμικές ταλαντώσεις γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας $x = 0$. Γι' αυτό, οι φασικές τροχιές είναι κλειστές όπως φαίνεται στο σχήμα 1β. Οι φασικές τροχιές βρίσκονται πάνω στις ισοενεργειακές καμπύλες

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{4}\varepsilon x^4 = E \qquad (1)$$

Στη γειτονιά του σημείου ισορροπίας $x = \dot{x} = 0$, δηλ. για μικρά x και $\dot{x}$, ο όρος x^4 της (1) είναι ασήμαντος σε σχέση με τους υπόλοιπους και γιαυτό οι ισοενεργειακές καμπύλες μοιάζουν πολύ με ελλείψεις.

β) Περίπτωση $\varepsilon < 0$. Από το σχήμα 2α παρατηρούμε ότι υπάρχουν τρία σημεία ισορροπίας, ένα στην αρχή $x = \dot{x} = 0$ και δύο συμμετρικά στις θέσεις $\pm x_1 = \omega/\sqrt{-\varepsilon}$. Η αρχή $x = \dot{x} = 0$ είναι ευσταθής επειδή η $V(x)$ έχει εκεί ελάχιστο ενώ τα $\pm x_1$ είναι ασταθή επειδή η $V(x)$ έχει εκεί μέγιστο. Σύμφωνα με την (1) η ενέργεια που έχουν τα ασταθή σημεία $\pm x_1$ είναι ίση με

$$E_2 = \omega^2 x_1^2/2 + \varepsilon x_1^4/4 = -\omega^4/4\varepsilon \qquad (2)$$

Η διαχωριστική ισοενεργειακή καμπύλη έχει και αυτή ενέργεια ίση με E_2. Αντικαθιστώντας λοιπόν την (2) στην (1) βρίσκουμε ότι η διαχωριστική καμπύλη αποτελείται από τις ακόλουθες δύο συμμετρικές παραβολές

$$\dot{x} = \pm\sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}}\left(\frac{\omega^2}{\varepsilon} + x^2\right)$$

Μέσα στη θηλειά που σχηματίζει η διαχωριστική καμπύλη βρίσκονται όλες οι περιοδικές κινήσεις (κλειστές φασικές τροχιές) ενώ έξω από αυτήν βρίσκονται όλες οι μη-περιοδικές κινήσεις (ανοικτές φασικές τροχιές). Όπως φαίνεται στο σχήμα 2β, πάνω στη διαχωριστική καμπύλη υπάρχουν 8 φασικές τροχιές: τα δύο ασταθή σημεία ισορροπίας, η τροχιά (1) που τείνει στο $-x_1$ για $t \to \infty$, η τροχιά (4) που τείνει στο x_1 για $t \to \infty$, η τροχιά (2) που τείνει στο $-x_1$ για $t \to -\infty$, η τροχιά (3) που τείνει στο x_1 για $t \to -\infty$, η τροχιά (5) που τείνει στο x_1 για $t \to \infty$ και στο $-x_1$ για $t \to -\infty$ και τέλος η τροχιά (6) που τείνει στο $-x_1$ για $t \to \infty$ και στο x_1 για $t \to -\infty$.

β) Κεντρική κίνηση

1) Υλικό σημείο με μοναδιαία μάζα κινείται σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων με κέντρο την αρχή Ο του συστήματος αναφοράς. Αν οι αρχικές συνθήκες της κίνησης είναι $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\upsilon_0 = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, να βρεθεί το επίπεδο της κίνησης.

Λύση

Όπως είναι γνωστό, η τροχιά του υλ. σημείου βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο που περνάει από το σημείο Ο και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{L}$ (L_x, L_y, L_z) της στροφορμής. Από την Αναλυτική Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η εξίσωση αυτού του επιπέδου είναι

$$xL_x + yL_y + zL_z = 0$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε τις συνιστώσες L_x, L_y, L_z της στροφορμής. Είναι

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}_0 x \upsilon_0 = 7\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 19\mathbf{k}$$

Άρα $L_x = 7$, $L_y = -11$, $L_z = -19$ και η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$7x - 11y - 19z = 0$$

2) Να αποδειχθεί ότι αν η δυναμική ενέργεια είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης από ένα σημείο Ο, οι δυνάμεις είναι κεντρικές με κέντρο το Ο.

Λύση

Από τη γνωστή έκφραση της δύναμης σε σφαιρικές συντ/νες

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\mathbf{e}_\vartheta - \frac{1}{r\eta\mu\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi \qquad (1)$$

και το γεγονός ότι $V = V(r)$ προκύπτει ότι η (1) παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{F} = F(r)\mathbf{e}_r$$

όπου $F(r) = -\partial V/\partial r$, δηλ. ότι οι δυνάμεις είναι κεντρικές.

3) Να βρεθεί πεδίο κεντρικών δυνάμεων στο οποίο να είναι δυνατή η ύπαρξη των ακόλουθων τροχιών: α) $r = k\vartheta^2$ ($k > 0$), β) $r = ke^{\alpha\vartheta}$ ($k > 0$), γ) $r = \alpha\sigma\upsilon\nu 3\vartheta$, δ) $r = \alpha(1 + \eta\mu\vartheta)$, ε) $r = 2\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta$.

Λύση

Όταν γνωρίζουμε την εξίσωση $u = r^{-1} = u(\vartheta)$ των τροχιών, για να βρούμε τη δύναμη F αντικαθιστούμε την έκφραση $u = u(\vartheta)$ στη γνωστή εξίσωση

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = -\frac{mF}{u^2L^2}$$

και λύνουμε ως προς F. Εκτελώντας λοιπόν αυτές τις πράξεις στις παραπάνω περιπτώσεις βρίσκουμε:

α) $F = -\left(\frac{6k}{r} + 1\right)\frac{L^2}{mr^3}$, β) $F = -(\alpha^2 + 1)\frac{L^2}{mr^3}$

γ) $F = -\left(\frac{18\alpha^2}{r^3} - 8\right)\frac{L^2}{mr^3}$, δ) $F = -\frac{3\alpha L^2}{mr^4}$

ε) $F = -\frac{8\alpha^2L^2}{mr^5}$

4) Υλικό σημείο κινείται στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων $F = -kr$ $(k > 0)$. Αρχικά βρίσκεται σε απόσταση $r_0 = \alpha$ και έχει ταχύτητα υ_0 κάθετη στο διάνυσμα θέσης r_0. Να αποδειχθεί ότι η τροχιά του είναι έλλειψη με κέντρο το κέντρο των δυνάμεων.

Λύση

Οι Δ.Ε της κίνησης είναι

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad m\ddot{y} + ky = 0$$

και έχουν ως γενική λύση τη

$$x = c_1\text{συν}\omega t + c_2\text{ημ}\omega t, \quad y = c_3\text{συν}\omega t + c_4\text{ημ}\omega t \tag{1}$$

όπου $\omega = \sqrt{k/m}$ και οι σταθερές $c_1 - c_4$ θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες. Για το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε ως προς t τις (1) και βρίσκουμε

$$\dot{x} = -\omega c_1\text{ημ}\omega t + \omega c_2\text{συν}\omega t, \quad \dot{y} = -\omega c_3\text{ημ}\omega t + \omega c_4\text{συν}\omega t \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας στις (1) και (2) τις αρχικές συνθήκες

$$x_0 = \alpha,\ y_0 = 0,\ \dot{x}_0 = 0,\ \dot{y}_0 = \upsilon_0$$

βρίσκουμε

$$c_1 = \alpha,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0,\ c_4 = \upsilon_0/\omega$$

Άρα οι (1) γίνονται

$$x = \alpha\sigma\upsilon\nu\omega t, \quad y = \omega^{-1}\upsilon_0\eta\mu\omega t \tag{3}$$

Απαλοίφοντας το t από τις (3) βρίσκουμε ότι η εξίσωση της τροχιάς είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\upsilon_0}{\omega}\right)^2} = 1$$

δηλ. ότι η τροχιά είναι έλλειψη με κέντρο το κέντρο των δυνάμεων.

5) Υλικό σημείο κινείται στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων $F = -k/r^3$ $(k > 0)$. Να βρεθούν τα είδη των τροχιών του.

Λύση

Η Δ.Ε των τροχιών είναι

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = -\frac{mF}{u^2L^2} = \frac{mku}{L^2}$$

ή

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + Au = 0 \qquad \left(A = 1 - \frac{mk}{L^2}\right) \tag{1}$$

Το είδος της λύσης της Δ.Ε (1) εξαρτάται από το πρόσημο του Α. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

α) $A < 0$ ή $L^2 < mk$. Η γενική λύση της (1) έχει τη μορφή

$$u = c_1\cosh\omega\vartheta + c_2\sinh\omega\vartheta = c_3\cosh(\omega\vartheta + c_4) \tag{2}$$

όπου $\omega^2 = -A$ και $c_1 - c_4$ είναι αυθαίρετες σταθερές. (Οι καμπύλες (2) έχουν τη μορφή σπείρας που τυλίγεται συνεχώς γύρω από το κέντρο των δυνάμεων πλησιάζοντας συνεχώς προς αυτό).

β) $A > 0$ ή $L^2 > mk$. Η γενική λύση της (1) έχει τη μορφή

$$u = c_1 συνωϑ + c_2 ημωϑ = c_3 συν(ωϑ + c_4) \tag{3}$$

όπου $ω = \sqrt{A}$. Εκλέγοντας κατάλληλα τον άξονα από τον οποίο μετράμε τη γωνία $ϑ$, η (3) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$u = c_1 συνωϑ \tag{4}$$

(Οι καμπύλες (4) είναι σπείρες συμμετρικές ως προς τον αρχικό άξονα και έχουν ως ασύμπτωτες τις ευθείες $ϑ = \pm π/2u$).

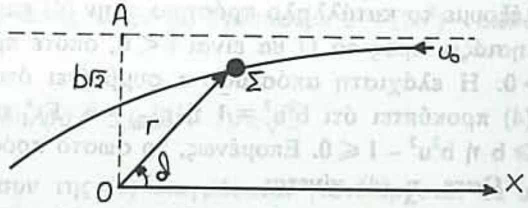
γ) $A = 0$ ή $L^2 = mk$. Η γενική λύση της (1) έχει τη μορφή

$$u = c_1 ϑ + c_2 \tag{5}$$

(Αν $c_1 \neq 0$ η (5) παριστάνει μια αντίστροφη σπείρα ενώ αν $c_1 = 0$ παριστάνει περιφέρεια κύκλου. Οι τροχιές στο πρόβλημα αυτό είναι γνωστές ως σπείρες του Cotes. Δεν θα προχωρήσουμε εδώ σε λεπτομερή διερεύνησή τους).

√ 6) Υλικό σημείο Σ με μάζα $m = 1$ κινείται στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων $F = -k/r^5$ $(k > 0)$. Το Σ έρχεται από το άπειρο κινούμενο πάνω σε ευθεία γραμμή που απέχει απόσταση $b\sqrt{2}$ από το κέντρο Ο των δυνάμεων και έχει στροφορμή ως προς Ο ίση με $\sqrt{k}/b$. Να αποδειχθεί ότι η τροχιά του έχει εξίσωση $r = b\coth(ϑ/\sqrt{2})$.

Λύση



Η Δ.Ε της τροχιάς του Σ είναι

$$\frac{d^2u}{dϑ^2} + u = -\frac{F}{L^2u^2} = \frac{ku^5}{L^2u^2} = b^2u^3 \tag{1}$$

Πολ/ζοντας την (1) επί $du/d\vartheta$ και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{b^2}{2}\,u^4 - u^2 + c \tag{2}$$

Η σταθερή c θα βρεθεί από τις αρχικές συνθήκες: για $t = 0$ είναι $r_0 = \infty$, $u_0 = r_0^{-1} = 0$, $(du/d\vartheta)_0 = -\dot{r}_0/L = -b\dot{r}_0/\sqrt{k} = b\upsilon_0/\sqrt{k}$. Η υ_0 βρίσκεται από τη σχέση

$$L = \upsilon_0 b\sqrt{2} = \sqrt{k}/b \Rightarrow \upsilon_0 = b^{-2}\sqrt{k/2}$$

Επομένως

$$(du/d\vartheta)_0 = (b\sqrt{2})^{-1}$$

Άρα, για $t = 0$ η (2) δίνει

$$c = (du/d\vartheta)_0^2 = (2b^2)^{-1}$$

οπότε η (2) γίνεται τελικά

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{1}{2b^2}\,(b^2u^2 - 1)^2 \tag{3}$$

Επομένως θα είναι

$$\frac{du}{d\vartheta} = \pm\,\frac{1}{b\sqrt{2}}\,(b^2u^2 - 1) \tag{4}$$

Για να διαλέξουμε το κατάλληλο πρόσημο στην (4) παρατηρούμε ότι επειδή το Σ πλησιάζει προς το Ο θα είναι $\dot{r} < 0$, οπότε πρέπει να είναι $du/d\vartheta = -\dot{r}/L > 0$. Η ελάχιστη απόσταση r συμβαίνει όταν $du/d\vartheta = 0$. Τότε από την (4) προκύπτει ότι $b^2u^2 = 1$ ή $r_{min} = b$. Γι' αυτό κατά την κίνηση είναι $r \geqslant b$ ή $b^2u^2 - 1 \leqslant 0$. Επομένως, το σωστό πρόσημο στην (4) είναι το μείον. Ώστε, η (4) γίνεται

$$\frac{du}{1 - b^2u^2} = \frac{d\vartheta}{b\sqrt{2}} \tag{5}$$

Ολοκληρώνοντας την (5) και παίρνοντας υπόψη ότι για $\vartheta = 0$ είναι $u = 0$ βρίσκουμε τελικά $r = b\coth(\vartheta/\sqrt{2})$.

7) Υλικό σημείο κινείται στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων $F = -mk/r^5$ $(k > 0)$. Για $t = 0$ βρισκόταν στη θέση $r = 2\alpha$, $\vartheta = 0$, είχε ακτινική ταχύτητα ίση με $\dot{r} = -3\upsilon/4\sqrt{2}$ και στροφορμή ίση με l. Τα υ και l στις αρχικές συνθήκες είναι ίσα, αντίστοιχα, με την ταχύτητα και την στροφορμή που έχει το υλικό σημείο όταν διαγράφει κυκλική τροχιά με ακτίνα α. Να αποδειχθεί ότι η τροχιά του τείνει ασυμπτωτικά προς την περιφέρεια $r = \alpha$, δηλ. ότι για $\vartheta \to \infty$ είναι $r \to \alpha$.

Λύση

Από το γνωστό τύπο $\upsilon^2 = -\alpha F(\alpha)/m$ προκύπτει ότι η ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς με ακτίνα α είναι ίση με $\upsilon = \sqrt{k}\cdot\alpha^{-2}$. Η αντίστοιχη στροφορμή είναι ίση με $l = m\alpha\upsilon = m\sqrt{k}\alpha^{-1}$. Επομένως, η Δ.Ε της τροχιάς γίνεται

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = -\frac{mF}{l^2u^2} = \alpha^2u^3 \tag{1}$$

Πολ/ζουμε την (1) επί $du/d\vartheta$ και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2 = \frac{\alpha^2}{2}\,u^4 + c \tag{2}$$

Η σταθερή c της ολοκλήρωσης θα βρεθεί από τις αρχικές συνθήκες. Από το γνωστό τύπο $du/d\vartheta = -m\dot{r}/l$ προκύπτει ότι για $t = 0$ είναι

$$\frac{du}{d\vartheta} = -\frac{m}{m\sqrt{k}\alpha^{-1}}\left(-\frac{3\upsilon}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4\sqrt{2}}\,\alpha^{-1}$$

Επομένως για $t = 0$ είναι $u = (2\alpha)^{-1}$ και $du/d\vartheta = 3\alpha^{-1}/4\sqrt{2}$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (2) βρίσκουμε $c = (2\alpha^2)^{-1}$ οπότε η (2) γίνεται τελικά

$$du/d\vartheta = \pm(\alpha^2u^2 - 1)/\alpha\sqrt{2} \tag{3}$$

Το πρόσημο συν της (3) διαγράφεται γιατί έρχεται σε αντίθεση με τις αρχικές συνθήκες. Ολοκληρώνοντας λοιπόν την (3) και παίρνοντας υπόψη ότι για $\vartheta = 0$ είναι $u = (2\alpha)^{-1}$ βρίσκουμε ότι η εξίσωση της τροχιάς είναι

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{r+\alpha}{3(r-\alpha)}$$

Επομένως η τροχιά είναι μια σπειροειδής καμπύλη που για $\vartheta \to \infty$ δίνει $r \to \alpha$, δηλ. που τείνει ασυμπτωτικά στην περιφέρεια $r = \alpha$.

8) Υλικό σημείο Σ κινείται σε πεδίο κεντρικών ελκτικών δυνάμεων. Να αποδειχθεί ότι από όλες τις τροχιές που έχουν την ίδια ενέργεια, εκείνη που έχει τη μεγαλύτερη στροφορμή είναι κυκλική.

Λύση

Αν η τροχιά με τη μεγαλύτερη στροφορμή δεν ήταν κυκλική, τότε θα υπήρχε ένα τουλάχιστον σημείο της Α στο οποίο η ταχύτητα του Σ δε θα ήταν κάθετη στο διάνυσμα θέσης ΟΑ. Θα μπορούσαμε λοιπόν να στρέψουμε την ταχύτητα στο σημείο Α έτσι ώστε να γίνει κάθετη στο διάνυσμα ΟΑ. Η νέα τροχιά που θα προκύψει έχει την ίδια ενέργεια με την αρχική (γιατί ξεκινάει από το ίδιο σημείο Α και το μέτρο της ταχύτητας δεν έχει αλλάξει από τη στροφή) αλλά έχει μεγαλύτερη στροφορμή (γιατί η ταχύτητα έγινε κάθετη στο ΟΑ). Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι η αρχική τροχιά έχει τη μεγαλύτερη στροφορμή. Άρα η τροχιά με τη μεγαλύτερη στροφορμή πρέπει να είναι κυκλική.

9) Υλικό σημείο Σ κινείται σε πεδίο κεντρικών ελκτικών δυνάμεων. Το Σ εκτοξεύεται πάντα κάθετα προς το αρχικό διάνυσμα θέσης με ταχύτητα υ τέτοια ώστε σε όλες τις περιπτώσεις η ενέργεια του Σ να είναι ίδια. Να αποδειχθεί ότι από όλες τις τροχιές εκείνη που έχει τη μεγαλύτερη στροφορμή είναι ευσταθής κυκλική ενώ εκείνη που έχει τη μικρότερη στροφορμή είναι ασταθής κυκλική.

Λύση

Αν r είναι η αρχική απόσταση του Σ από το κέντρο των δυνάμεων και E είναι η ενέργεια του, τότε η στροφορμή του δίνεται από τη σχέση

$$L^2 = m^2r^2\upsilon^2 = 2mr^2(E - V) \tag{1}$$

Οι άκρες τιμές του L^2 ικανοποιούν την εξίσωση

$$d(L^2)/dr = 2mr[2(E - V) - r\,dV/dr] = 0 \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\upsilon^2 = m^{-1}r\,dV/dr = -m^{-1}rF \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι η (3) είναι ίδια με την εξίσωση που ισχύει για κυκλική τροχιά με ακτίνα r. Άρα οι τροχιές που έχουν ακρότατη στροφορμή είναι κυκλικές.

Από την (2) προκύπτει ότι

$$\frac{d^2(L^2)}{dr^2} = 4m(E - V) - 8mr\,\frac{dV}{dr} - 2mr^2\,\frac{d^2V}{dr^2}$$

Με τη βοήθεια της (2) η σχέση αυτή γίνεται

$$\frac{d^2(L^2)}{dr^2} = -2mr\Big(3\,\frac{dV}{dr} + r\,\frac{d^2V}{dr^2}\Big) = 2mr^2\,\Big(\frac{3F}{r} + \frac{dF}{dr}\Big) \tag{4}$$

΄Οπως γνωρίζουμε, για μια ευσταθή κυκλική τροχιά το δεύτερο μέλος της (4) είναι αρνητικό. Αυτό σημαίνει ότι για την τροχιά αυτή το L^2 έχει μέγιστο. Αντίθετα, για μια ασταθή τροχιά είναι θετικό, οπότε το L^2 έχει ελάχιστο.

10) Υλικό σημείο Σ με μάζα m κινείται στο πεδίο των γενικευμένων κεντρικών δυνάμεων $F = -m\mu r^{-2}\eta\mu^2\vartheta$, $(\mu > 0)$. Αρχικά το Σ βρίσκεται σε απόσταση $r_0 = \alpha$ από το κέντρο Ο των δυνάμεων και έχει ταχύτητα $\upsilon_0 = \sqrt{2\mu/3\alpha}$ κάθετη στο διάνυσμα θέσης. Να βρεθεί η κίνηση.

Λύση

Στην περίπτωση των γενικευμένων κεντρικών δυναμεων, οι δυνάμεις περνούν πάντα από ένα σημείο Ο (κέντρο) αλλά το μέτρο τους εξαρτιέται όχι μόνο από την απόσταση r αλλά και από τη γωνία ϑ. Επομένως, η στροφορμή του Σ ως προς το Ο διατηρείται σταθερή και γι' αυτό η Δ.Ε της τροχιάς του Σ είναι ίδια όπως στην περίπτωση των συνηθισμένων κεντρικών δυνάμεων $F = F(r)$, δηλαδή είναι

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = -\frac{mF}{L^2u^2} = \frac{m^2\mu}{L^2}\,\eta\mu^2\vartheta \tag{1}$$

Η στροφορμή είναι ίση με $L = mr_0\upsilon_0 = m\alpha\sqrt{2\mu/3\alpha}$. Επομένως η (1) γίνεται τελικά

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{3}{4\alpha}\,(1 - \sigma\upsilon\nu 2\vartheta)$$

Η γενική λύση αυτής της γραμμικής Δ.Ε είναι

$$u = c_1\sigma\upsilon\nu\vartheta + c_2\eta\mu\vartheta + (4\alpha)^{-1}(3 + \sigma\upsilon\nu 2\vartheta) \tag{2}$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες. Για το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε την (2) ως προς ϑ και βρίσκουμε

$$du/d\vartheta = -c_1 ημ\vartheta + c_2 συν\vartheta - (2α)^{-1} ημ2\vartheta \tag{3}$$

Για $t = 0$ είναι

$$\vartheta = 0, \ u = α^{-1}, \ du/d\vartheta = -m\dot{r}_0/L = 0$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στις (2) και (3) προκύπτει ότι $c_1 = c_2 = 0$. Άρα η εξίσωση της τροχιάς γίνεται

$$u = r^{-1} = (4α)^{-1}(3 + συν2\vartheta) = (2α)^{-1}(1 + συν^2\vartheta) \tag{4}$$

Για να βρούμε πώς κινείται το Σ πάνω στην τροχιά (4) χρησιμοποιούμε τη γνωστή σχέση $L = mr^2 d\vartheta/dt = mα\sqrt{2μ/3α}$ η οποία με τη βοήθεια της (4) γίνεται

$$\sqrt{\frac{2αμ}{3}}\, dt = 4α^2(1 + συν^2\vartheta)^{-2} d\vartheta$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή (με τη βοήθεια της αντικατάστασης $εφ\vartheta = ψ$) και παίρνοντας υπόψη ότι για $t = 0$ είναι $\vartheta = 0$ βρίσκουμε

$$\sqrt{\frac{2αμ}{3}}\, t = α^2\Big[\frac{3}{\sqrt{2}}\, τοξεφ\Big(\frac{εφ\vartheta}{\sqrt{2}}\Big) - \frac{εφ\vartheta}{2 + εφ^2\vartheta}\Big]$$

11) Υλικό σημείο Σ με μάζα $m = 1$ κινείται στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων $F = 3k^4α^2b^2r^{-7} - 2k^4(α^2 + b^2)r^{-5}$. Αρχικά το Σ βρίσκεται σε απόσταση $r_0 = α$ από το κέντρο Ο των δυνάμεων και έχει ταχύτητα $υ_0 = k^2/α$ κάθετη στο διάνυσμα θέσης. Να βρεθεί η τροχιά και η κίνησή του Σ.

Λύση

Το ολοκλήρωμα της ενέργειας είναι

$$E = T + V = \frac{1}{2}\, υ^2 + \frac{k^4α^2b^2}{2r^6} - \frac{k^4(α^2 + b^2)}{2r^4} \tag{1}$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες $r = α$, $υ = k^2/α$ στην (1) βρίσκουμε $E = 0$.

Άρα η (1) γίνεται

$$\upsilon^2 = -k^4\alpha^2 b^2 r^{-6} + k^4(\alpha^2 + b^2)r^{-4} \tag{2}$$

Η στροφορμή είναι ίση με $L = mr_0\upsilon_0 = mk^2$. Επομένως θα είναι

$$\dot{\vartheta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{k^2}{r^2}, \quad \dot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d(1/r)}{d\vartheta} = -k^2\ \frac{d(1/r)}{d\vartheta}$$

οπότε ο γνωστός τύπος $\upsilon^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2$ δίνει

$$\upsilon^2 = k^4\Big[\Big(\frac{d(1/r)}{d\vartheta}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big] = k^4\Big[\frac{1}{r^4}\ \Big(\frac{dr}{d\vartheta}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big] \tag{3}$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει τελικά ότι

$$\pm d\vartheta = [A^2 - (r^2 - B)^2]^{-1/2} r dr \tag{4}$$

όπου

$$A = (\alpha^2 - b^2)/2, \quad B = (\alpha^2 + b^2)/2$$

Ολοκληρώνοντας την (4) και παίρνοντας ως πολικό άξονα το αρχικό διάνυσμα θέσης του Σ (δηλ. $\vartheta = 0$ όταν $r = \alpha$) βρίσκουμε

$$\pm 2\vartheta = \text{τοξσυν}[A^{-1}(r^2 - B)]$$

ή

$$r^2 = B + A\text{συν}2\vartheta = \alpha^2\text{συν}^2\vartheta + b^2\text{ημ}^2\vartheta \tag{5}$$

ή σε Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Άρα η τροχιά είναι έλλειψη με κέντρο το Ο και ημιάξονες α και b. Για να βρούμε πώς κινείται το Σ πάνω στην έλλειψη χρησιμοποιούμε το ολοκλήρωμα της στροφορμής

$$L = mk^2 = mr^2 d\vartheta/dt \tag{6}$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (6) βρίσκουμε

$$k^2 dt = (B + A\text{συν}2\vartheta)d\vartheta$$

Ολοκληρώνοντας και παίρνοντας υπόψη ότι για $t = 0$ είναι $\vartheta = 0$ βρίσκουμε

$$k^2 t = B\vartheta + 0.5A\eta\mu 2\vartheta$$

12) Υλικό σημείο Σ με μάζα $m = 1$ κινείται στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων $F = \lambda \alpha r^{-3} + \mu r^{-2}$. Αρχικά εκτοξεύεται από μια αψίδα $r = \alpha$ με ταχύτητα $\upsilon_0 = (\lambda/\alpha + 4\mu/3\alpha)^{1/2}$. Να αποδειχθεί ότι η δεύτερη αψίδα βρίσκεται σε απόσταση 2α.

Λύση

Η Δ.Ε της τροχιάς είναι

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = -\frac{mF}{u^2L^2} = \frac{\lambda\alpha u + \mu}{L^2} \tag{1}$$

όπου η στροφορμή είναι ίση με

$$L = m\alpha\upsilon_0 = \left[\alpha\left(\lambda + \frac{4\mu}{3}\right)\right]^{1/2} \tag{2}$$

Πολ/ζοντας την (1) επί $du/d\vartheta$ και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2\left(1 - \frac{\lambda\alpha}{L^2}\right) - \frac{2\mu}{L^2}\, u = c \tag{3}$$

Από τη (2) προκύπτει ότι $(1 - \lambda\alpha/L^2) = 4\alpha\mu/3L^2$ οπότε η (3) γίνεται

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{4\alpha\mu}{3L^2}\, u^2 - \frac{2\mu}{L^2}\, u = c \tag{4}$$

Στις αψίδες είναι $du/d\vartheta = 0$. Ἀρα, το u των αψίδων επαληθεύει, σύμφωνα με την (4), την εξίσωση

$$\frac{4\alpha\mu}{3L^2}\, u^2 - \frac{2\mu}{L^2}\, u = c \tag{5}$$

Η (5) πρέπει να επαληθεύεται από τη γνωστή αψίδα $r = \alpha$ ή $u = \alpha^{-1}$. Για $u = \alpha^{-1}$ η (5) δίνει $c = -2\mu/3\alpha L^2$. Ἀρα η (5) δίνει τελικά

$$2\alpha^2u^2 - 3\alpha u + 1 = 0 \tag{6}$$

Οι ρίζες της (6) είναι $u_1 = \alpha^{-1}$ και $u_2 = (2\alpha)^{-1}$. Άρα η δεύτερη αψίδα βρίσκεται σε απόσταση $r_2 = u_2^{-1} = 2\alpha$.

13) Υλικό σημείο Σ κινείται σε κάποιο συγκεκριμένο πεδίο κεντρικών ελκτικών δυνάμεων F(r). Να βρεθεί το αποτέλεσμα που θα έχει στην κίνηση η προσθήκη μιας ακόμη κεντρικής ελκτικής δύναμης που είναι αντίστροφα ανάλογη προς τον κύβο της απόστασης, δηλ. ίση με $-\mu r^{-3}$ $(\mu > 0)$.

Λύση

Οι Δ.Ε που συνδέουν τα r και t καθώς και τα r και ϑ στο αρχικό πεδίο δυνάμεων γράφονται σε μια σχέση με τη μορφή

$$\frac{1}{2}\, m\dot{r}^2 = \frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = E - V - \frac{L^2}{2mr^2} \tag{1}$$

Η προσθήκη της έλξης $-\mu r^{-3}$ σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια V του Σ γίνεται ίση με $V - \mu/2r^2$ οπότε οι Δ.Ε (1) γίνονται

$$\frac{1}{2}\, m\dot{r}^2 - \frac{L'^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = E' - V - \frac{L^2 + m\mu}{2mr^2} \tag{2}$$

όπου E' και L' είναι αντίστοιχα, η ενέργεια και η στροφορμή της νέας κίνησης. Αν διαλέξουμε

$$E' = E, \quad L'^2 = L^2 - m\mu \tag{3}$$

οι εξισώσεις (2) γίνονται

$$\frac{1}{2}\, m\dot{r}^2 = \frac{L^2}{2mr^4}\left[\frac{dr}{d(k\vartheta)}\right]^2 = E - V - \frac{L^2}{2mr^2} \tag{4}$$

όπου $k = L/L' < 1$.

Συγκρίνοντας τις Δ.Ε (4) και (1) παρατηρούμε ότι η Δ.Ε που συνδέει τα r και t είναι ακριβώς ίδια και στις δυο περιπτώσεις ενώ η Δ.Ε που συνδέει τα r και ϑ στο αρχικό πεδίο είναι ίδια με την εξίσωση που συνδέει τα r και $k\vartheta$ στο νέο πεδίο. Επομένως, αν

$$r = f(t), \qquad r = \Phi(\vartheta) \tag{5}$$

είναι μια κίνηση στο αρχικό πεδίο, τότε στο νέο πεδίο η αντίστοιχη κίνηση, με αρχικές συνθήκες τέτοιες ώστε να ισχύουν οι (3), είναι

$$r = f(t), \qquad r = \Phi[k(\vartheta - \vartheta_0)] \tag{6}$$

Η επιλογή των νέων αρχικών συνθηκών ώστε να ισχύουν οι (3) δεν είναι δύσκολη, π.χ. ας υποθέσουμε ότι στο αρχικό πεδίο το Σ εκτοξεύεται από μια αψίδα Α σε απόσταση $OA = \alpha$ με ταχύτητα υ_0 (κάθετη στην $\overrightarrow{OA}$). Αν στο νέο πεδίο το Σ εκτοξευθεί από το ίδιο σημείο με ταχύτητα $[\upsilon_0^2 + (\mu/\alpha)^2]^{1/2}$ κάθετη στην $\overrightarrow{OA}$ τότε οι (3) ικανοποιούνται. Αν η εξίσωση της αρχικής τροχιάς (με πολικό άξονα τον ΟΑ) είναι $r = \Phi(\vartheta)$, η εξίσωση της νέας τροχιάς θα είναι $r = \Phi(k\vartheta)$. Αν λοιπόν φανταστούμε το Σ να κινείται πάνω στην αρχική τροχιά και ταυτόχρονα η τροχιά αυτή να περιστρέφεται γύρω από το Ο με γωνιακή ταχύτητα $k\dot{\vartheta} - \dot{\vartheta} = (k-1)\dot{\vartheta}$ τότε η τροχιά του Σ συμπίπτει με την τροχιά που κάνει στο νέο πεδίο. Επομένως, η προσθήκη της δύναμης $-\mu r^{-3}$ προκαλεί περιστροφή των αρχικών τροχιών του Σ.

14) Δορυφόρος γυρίζει γύρω από τη Γη. Να αποδειχθεί ότι οι αποστάσεις r_1 του περίγειου και r_2 του απόγειου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $r^2 + (mk/E)r - L^2/2mE = 0$, όπου $k = GM$ (M = μάζα της Γης).

Λύση

Η ενέργεια και η στροφορμή του δορυφόρου είναι ίσες με

$$E = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) - km/r, \qquad L = mr^2\dot{\vartheta}$$

Απαλοίφοντας το $\dot{\vartheta}$ από τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε

$$E = \frac{1}{2}\, m\Big(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\Big) - \frac{km}{r} \tag{1}$$

Στο περίγειο και το απόγειο, η ταχύτητα είναι κάθετη στην επιβατική ακτίνα, δηλ. είναι $\dot{r} = 0$. Επομένως η (1) γίνεται στην περίπτωση αυτή

$$r^2 + (mk/E)r - L^2/2mE = 0 \tag{2}$$

15) Δορυφόρος γυρίζει γύρω από τη Γη σε κυκλική τροχιά με ακτίνα $\alpha = 4R$ όπου R είναι η ακτίνα της Γης. Σε μία στιγμή, μια σύντομη ανάφλεξη των ανασχετικών πυραύλων του ελαττώνει την ταχύτητά του από

υ_0 σε υ χωρίς να μεταβάλει τη διεύθυνσή της. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να διαγράψει ο δορυφόρος ελλειπτική τροχιά με απόσταση περίγειου ίση με $r_1 = 2R$. Να βρεθεί ο λόγος $\lambda = \upsilon/\upsilon_0$.

Λύση

Τη στιγμή της ανάφλεξης, ο δορυφόρος βρίσκεται σε απόσταση $r_2 = 4R$ και έχει ταχύτητα κάθετη στην επιβατική ακτίνα. Άρα τη στιγμή εκείνη βρίσκεται σε μία από τις δύο αψίδες (περίγειο-απόγειο) της ελλειπτικής τροχιάς. Σύμφωνα με την άσκηση το περίγειο βρίσκεται σε απόσταση $r_1 = 2R$. Άρα ο δορυφόρος, που βρίσκεται σε απόσταση $r_2 = 4R$, βρίσκεται στο απόγειο. Οι αποστάσεις $r_1 = 2R$ και $r_2 = 4R$ είναι (σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση) οι ρίζες της εξίσωσης

$$r^2 + (mk/E)r - L^2/2mE = 0 \qquad (1)$$

Η ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς είναι ίση με $\upsilon_0 = \sqrt{k/\alpha} = \sqrt{k/4R}$. Άρα η ενέργεια και η στροφορμή της ελλειπτικής κίνησης είναι ίσες με

$$E = \frac{1}{2}\, m\upsilon^2 - \frac{mk}{\alpha} = \frac{mk}{8R}\,(\lambda^2 - 2), \qquad L = m\alpha\upsilon = 2m\lambda\sqrt{kR}$$

Επομένως η (1) γίνεται

$$r^2 + \left(\frac{8R}{\lambda^2 - 2}\right)r - \frac{16\lambda^2R^2}{\lambda^2 - 2} = 0$$

Για να έχει η εξίσωση αυτή ρίζες ίσες με 2R και 4R πρέπει το λ να είναι ίσο με $\sqrt{2/3}$.

16) Δορυφόρος γυρίζει γύρω από τη Γη σε κυκλική τροχιά με ακτίνα $\alpha = 2R$ όπου R είναι η ακτίνα της Γης. Ξαφνικά η διεύθυνση της κίνησης του αλλάζει και στρέφεται προς τη Γη κατά γωνία φ χωρίς να αλλάξει το μέτρο της ταχύτητάς του. Για ποια γωνία φ ο δορυφόρος κινείται έτσι ώστε μόλις να αγγίξει τη Γη;

Λύση

Στην κυκλική τροχιά ο δορυφόρος έχει ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{k/\alpha} = \sqrt{k/2R}$ και ενέργεια $E = m\upsilon^2/2 - mk/\alpha = -mk/4R$. Μετά την αλλαγή της διεύθυνσης της υ, η ενέργεια Ε δεν αλλάζει (επειδή το μέτρο της υ δεν αλλάζει) ενώ η στροφορμή αλλάζει και από $m\alpha\upsilon$ γίνεται ίση με $L = m\alpha\upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi = m\sqrt{2kR}\,\sigma\upsilon\nu\varphi$. Για να αγγίξει οδορυφόρος τη Γη πρέπει η απόσταση r_1 του περίγειου να είναι ίση με την ακτίνα R της Γης. Όμως, σύμφωνα με κίνηση, με αρχικές συνθήκες τέτοιες ώστε να ισχύουν οι (3), είναι

$$r = f(t), \qquad r = \Phi[k(\vartheta - \vartheta_0)] \tag{6}$$

Η επιλογή των νέων αρχικών συνθηκών ώστε να ισχύουν οι (3) δεν είναι δύσκολη, π.χ. ας υποθέσουμε ότι στο αρχικό πεδίο το Σ εκτοξεύεται από μια αψίδα A σε απόσταση OA = α με ταχύτητα υ_0 (κάθετη στην $\overrightarrow{OA}$). Αν στο νέο πεδίο το Σ εκτοξευθεί από το ίδιο σημείο με ταχύτητα $[\upsilon_0^2 + (\mu/\alpha)^2]^{1/2}$ κάθετη στην $\overrightarrow{OA}$ τότε οι (3) ικανοποιούνται. Αν η εξίσωση της αρχικής τροχιάς (με πολικό άξονα τον OA) είναι $r = \Phi(\vartheta)$, η εξίσωση της νέας τροχιάς θα είναι $r = \Phi(k\vartheta)$. Αν λοιπόν φανταστούμε το Σ να κινείται πάνω στην αρχική τροχιά και ταυτόχρονα η τροχιά αυτή να περιστρέφεται γύρω από το O με γωνιακή ταχύτητα $k\dot\vartheta - \dot\vartheta = (k-1)\dot\vartheta$ τότε η τροχιά του Σ συμπίπτει με την τροχιά που κάνει στο νέο πεδίο. Επομένως, η προσθήκη της δύναμης $-\mu r^{-3}$ προκαλεί περιστροφή των αρχικών τροχιών του Σ.

14) Δορυφόρος γυρίζει γύρω από τη Γη. Να αποδειχθεί ότι οι αποστάσεις r_1 του περίγειου και r_2 του απόγειου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $r^2 + (mk/E)r - L^2/2mE = 0$, όπου $k = GM$ (M = μάζα της Γης).

Λύση

Η ενέργεια και η στροφορμή του δορυφόρου είναι ίσες με

$$E = \frac{1}{2}\, m(\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2) - km/r, \qquad L = mr^2\dot\vartheta$$

Απαλοίφοντας το $\dot\vartheta$ από τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε

$$E = \frac{1}{2}\, m\left(\dot r^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) - \frac{km}{r} \tag{1}$$

Στο περίγειο και το απόγειο, η ταχύτητα είναι κάθετη στην επιβατική ακτίνα, δηλ. είναι $\dot r = 0$. Επομένως η (1) γίνεται στην περίπτωση αυτή

$$r^2 + (mk/E)r - L^2/2mE = 0 \tag{2}$$

15) Δορυφόρος γυρίζει γύρω από τη Γη σε κυκλική τροχιά με ακτίνα $\alpha = 4R$ όπου R είναι η ακτίνα της Γης. Σε μία στιγμή, μια σύντομη ανάφλεξη των ανασχετικών πυραύλων του ελαττώνει την ταχύτητά του από

υ_0 σε υ χωρίς να μεταβάλει τη διεύθυνσή της. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να διαγράψει ο δορυφόρος ελλειπτική τροχιά με απόσταση περίγειου ίση με $r_1 = 2R$. Να βρεθεί ο λόγος $\lambda = \upsilon/\upsilon_0$.

Λύση

Τη στιγμή της ανάφλεξης, ο δορυφόρος βρίσκεται σε απόσταση $r_2 = 4R$ και έχει ταχύτητα κάθετη στην επιβατική ακτίνα. Άρα τη στιγμή εκείνη βρίσκεται σε μία από τις δύο αψίδες (περίγειο-απόγειο) της ελλειπτικής τροχιάς. Σύμφωνα με την άσκηση το περίγειο βρίσκεται σε απόσταση $r_1 = 2R$. Άρα ο δορυφόρος, που βρίσκεται σε απόσταση $r_2 = 4R$, βρίσκεται στο απόγειο. Οι αποστάσεις $r_1 = 2R$ και $r_2 = 4R$ είναι (σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση) οι ρίζες της εξίσωσης

$$r^2 + (mk/E)r - L^2/2mE = 0 \qquad (1)$$

Η ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς είναι ίση με $\upsilon_0 = \sqrt{k/\alpha} = \sqrt{k/4R}$. Άρα η ενέργεια και η στροφορμή της ελλειπτικής κίνησης είναι ίσες με

$$E = \frac{1}{2}\, m\upsilon^2 - \frac{mk}{\alpha} = \frac{mk}{8R}\,(\lambda^2 - 2), \qquad L = m\alpha\upsilon = 2m\lambda\sqrt{kR}$$

Επομένως η (1) γίνεται

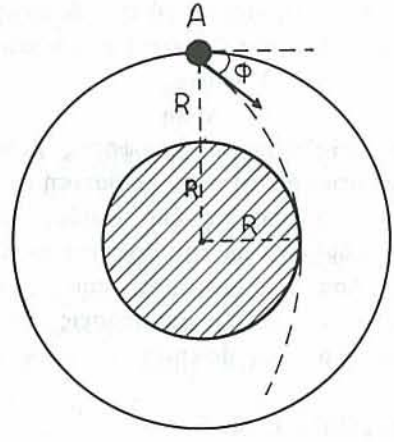
$$r^2 + \left(\frac{8R}{\lambda^2 - 2}\right)r - \frac{16\lambda^2R^2}{\lambda^2 - 2} = 0$$

Για να έχει η εξίσωση αυτή ρίζες ίσες με 2R και 4R πρέπει το λ να είναι ίσο με $\sqrt{2/3}$.

16) Δορυφόρος γυρίζει γύρω από τη Γη σε κυκλική τροχιά με ακτίνα $\alpha = 2R$ όπου R είναι η ακτίνα της Γης. Ξαφνικά η διεύθυνση της κίνησης του αλλάζει και στρέφεται προς τη Γη κατά γωνία φ χωρίς να αλλάξει το μέτρο της ταχύτητάς του. Για ποια γωνία φ ο δορυφόρος κινείται έτσι ώστε μόλις να αγγίξει τη Γη;

Λύση

Στην κυκλική τροχιά ο δορυφόρος έχει ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{k/\alpha} = \sqrt{k/2R}$ και ενέργεια $E = m\upsilon^2/2 - mk/\alpha = -mk/4R$. Μετά την αλλαγή της διεύθυνσης της υ, η ενέργεια E δεν αλλάζει (επειδή το μέτρο της υ δεν αλλάζει) ενώ η στροφορμή αλλάζει και από $m\alpha\upsilon$ γίνεται ίση με $L = m\alpha\upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi = m\sqrt{2kR}\,\sigma\upsilon\nu\varphi$. Για να αγγίξει οδορυφόρος τη Γη πρέπει η απόσταση r_1 του περίγειου να είναι ίση με την ακτίνα R της Γης. Όμως, σύμφωνα με



την άσκηση 14, η r_1 είναι η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης

$$r^2 + (km/E)r - L^2/2mE = 0 \qquad (1)$$

Αντικαθιστώντας τα E και L που βρήκαμε πριν, η (1) γίνεται

$$r^2 - 4Rr + 4R^2συν^2φ = 0 \qquad (2)$$

Η μικρότερη ρίζα της (2) είναι η $2R(1 - ημφ)$ και πρέπει να είναι ίση με R. Επομένως θα είναι $ημφ = 1/2$ ή $φ = 30^0$.

17) Δορυφόρος κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τη Γη. Κάθε φορά που περνάει από το περίγειο συναντά τα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας με αποτέλεσμα να ελαττώνεται η ταχύτητά του υ κατά $Δυ = ευ$ όπου ε είναι ένας μικρός θετικός αριθμός. Να βρεθεί με προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς ε η εκκεντρότητα της τροχιάς του μετά από n περάσματα από το περίγειο.

Λύση

Από τις γνωστές σχέσεις $υ^2 = k(2/r - 1/α)$ και $r_p = α(1 - e)$ προκύπτει ότι η εκκεντρότητα μιας ελλειπτικής τροχιάς εκφράζεται ως συνάρτηση της απόστασης r_p του περίγειου και της ταχύτητας $υ_p$ στο περίγειο από τον τύπο

$$e = r_p υ_p^2/k - 1 \qquad (1)$$

Αν $υ_0$ είναι η ταχύτητα λίγο πριν από το πρώτο πέρασμα από το περίγειο r_0 της πρώτης ελλειτπικής τροχιάς, η εκκεντρότητα της θα είναι, σύμφωνα με την (1), ίση με

$$e_0 = r_0 \upsilon_0^2/k - 1 \tag{2}$$

Αμέσως μετά το πρώτο πέρασμα από το περίγειο r_0 η ταχύτητα του δορυφόρου ελαττώνεται σε

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 - \varepsilon\upsilon_0 = \upsilon_0(1-\varepsilon) \Rightarrow \upsilon_1^2 = \upsilon_0^2(1-\varepsilon)^2 \simeq \upsilon_0^2(1-2\varepsilon)$$

Άρα η νέα τιμή της εκκεντρότητας είναι, σύμφωνα με την (1),

$$e_1 = r_0\upsilon_1^2/k - 1 \simeq r_0\upsilon_0^2(1-2\varepsilon)/k - 1 = r_0\upsilon_0^2/k - 1 - 2\varepsilon r_0\upsilon_0^2/k$$

ή

$$e_1 \simeq e_0 - 2\varepsilon(1+e_0) \tag{2}$$

Είναι φανερό ότι μετά από το δεύτερο πέρασμα του δορυφόρου από το περίγειο, η νέα εκκεντρότητα θα είναι ίση με

$$e_2 \simeq e_1 - 2\varepsilon(1+e_1) \simeq e_0 - 4\varepsilon(1+e_0) \qquad \text{κ.λ.π.}$$

Έτσι, μετά από n περάσματα, θα είναι ίση με

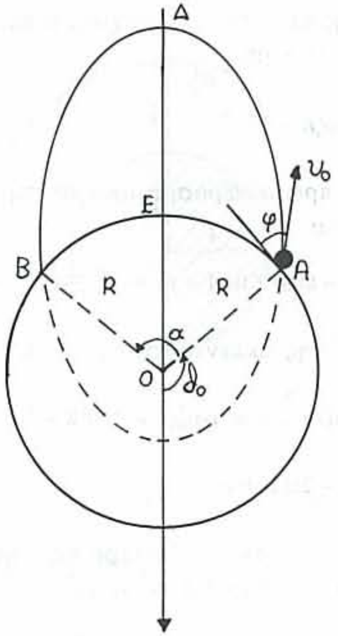
$$e_n \simeq e_1 - 2n\varepsilon(1+e_0)$$

Παρατηρούμε ότι η εκκεντρότητα ελαττώνεται συνεχώς δηλ. ότι η τροχιά τείνει να γίνει κυκλική, π.χ. για $\varepsilon = 0.01$ και $e_0 = 0.9$ η τροχιά γίνεται κυκλική ($e_n = 0$) μετά από $n = 24$ περιστροφές. (Όμως η κυκλική τροχιά βρίσκεται ολόκληρη μέσα στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας και γι' αυτό ο δορυφόρος συναντά αντίσταση σε όλη τη διάρκεια της κίνησης και όχι μόνο στο περίκεντρο. Γι' αυτό, το αποτέλεσμα $n = 24$ δεν είναι ακριβές).

18) Πύραυλος εκτοξεύεται από ένα καθορισμένο σημείο Α της επιφάνειας της Γης με ταχύτητα υ_0 με σκοπό να χτυπήσει κάποιο άλλο τυχαίο σημείο Β της επιφάνειας. Για ποια γωνία εκτόξευσης φ, ως προς τον οριζόντιο επίπεδο, πετυχαίνει το μέγιστο βεληνεκές; Πόσο είναι τότε το μέγιστο ύψος του από την επιφάνεια της Γης;

Λύση

Το βεληνεκές β είναι ίσο με το μήκος του τόξου ΑΕΒ (βλέπε στο



σχήμα), δηλ. β = αR. Επομένως, το β είναι μέγιστο όταν η γωνία α είναι μέγιστη. Θα υπολογίσουμε λοιπόν την εφ(α/2) ως συνάρτηση της γωνίας εκτόξευσης φ και θα βρούμε πότε γίνεται μέγιστη. Ισχύουν οι γνωστοί τύποι της ελλειπτικής κίνησης

$$r = p(1 + e\,\text{συν}\vartheta)^{-1} \tag{1}$$

$$e^2 = 1 + 2L^2E/k^2m^3, \qquad p = L^2/m^2k \qquad (k = GM) \tag{2}$$

Η ενέργεια και η στροφορμή του πυραύλου είναι ίσες με

$$E = m\upsilon_0^2/2 - km/R, \qquad L = mR\upsilon_0\text{συν}\varphi$$

Άρα οι (2) γίνονται

$$e^2 = 1 + b(b-2)\text{συν}^2\varphi, \qquad p = bR\text{συν}^2\varphi \qquad (b \equiv R\upsilon_0^2/k) \tag{3}$$

Εφαρμόζοντας την (1) για το σημείο A ($r = R$, $\vartheta = \vartheta_0$) βρίσκουμε

$$\text{συν}\vartheta_0 = e^{-1}(p/R - 1) \tag{4}$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει τελικά ότι

$$\varepsilon\varphi\vartheta_0 = b\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu\varphi(b\sigma\upsilon\nu^2\varphi - 1)^{-1}$$

΄Ομως είναι $\vartheta_0 + \alpha/2 = \pi$. ΄Αρα η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\varepsilon\varphi(\alpha/2) = b\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu\varphi(1 - b\sigma\upsilon\nu^2\varphi)^{-1} \tag{5}$$

Για $0 < \alpha < \pi/2$, η $\varepsilon\varphi(\alpha/2)$ γίνεται μέγιστη (το b είναι σταθερό) όταν η γωνία φ ικανοποιεί (όπως προκύπτει μετά από την εκτέλεση των σχετικών πράξεων) την σχέση

$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi = (2 - b)^{-1} \tag{6}$$

΄Ωστε το βεληνεκές γίνεται μέγιστο για καθορισμένη ταχύτητα υ_0, όταν η γωνία εκτόξευσης φ ικανοποιεί την (6), με την προϋπόθεση βέβαια ότι είναι $(2 - b)^{-1} < 1$ ή $b < 1$ ή $\upsilon_0^2 < k/R$. Αντικαθιστώντας την (6) στις (3) βρίσκουμε ότι για την τροχιά με το μέγιστο βεληνεκές ισχύουν οι σχέσεις

$$e^2 = 1 - b, \qquad p = bR(2 - b)^{-1} \tag{7}$$

Για την τροχιά αυτή, το μέγιστο ύψος από την επιφάνεια της Γης είναι ίσο με (βλέπε στο σχήμα)

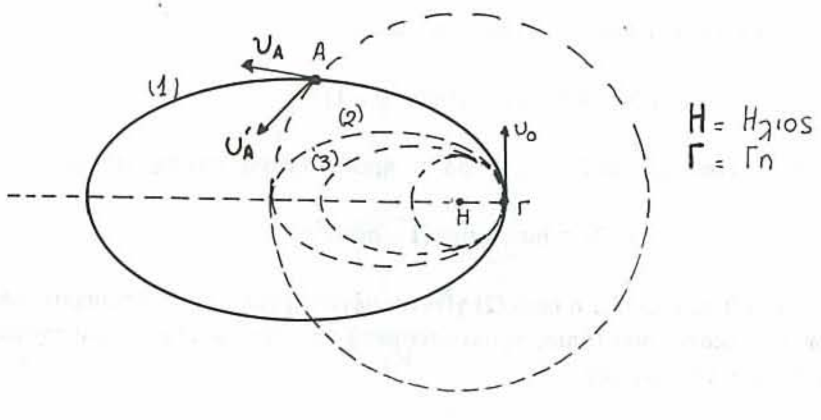
$$h_{max} = E\Delta = O\Delta - OE = r_\alpha - R$$

όπου $r_\alpha = p/(1 - e)$ είναι η απόσταση του απόγειου.

19) Δορυφόρος εκτοξεύεται από τη Γη με ταχύτητα υ_1 (ως προς τη Γη) με σκοπό να τοποθετηθεί στην κυκλική τροχιά του ΄Αρη. Για το σκοπό αυτό καθώς διαγράφει την ελλειπτική του τροχιά, μόλις φτάσει στην απόσταση του ΄Αρη πυροδοτούνται στιγμιαία οι πύραυλοί του ώστε να αποκτήσει την ταχύτητα που χρειάζεται για να κινηθεί πάνω στην κυκλική τροχιά του ΄Αρη. Διαφορετικά, θα συνέχιζε την ελλειπτική κίνηση του και θα έφευγε από την τροχιά του ΄Αρη. Ποια είναι η ελλειπτική τροχιά που πετυχαίνει το σκοπό αυτό και πόσο διαρκεί το ταξίδι του δορυφόρου πάνω σ' αυτή τη μεταβατική τροχιά;

Λύση

Υποθέτουμε ότι ο δορυφόρος Δ εκτοξεύεται κατά τη διεύθυνση της



κίνησης της Γης. Επομένως η απόλυτη ταχύτητά του (ως προς τον Ήλιο που είναι η ελκτική εστία) είναι ίση με $\upsilon_0 = \upsilon_1 + \upsilon_\Gamma$ όπου υ_Γ είναι η ταχύτητα της Γης. Όταν η υ_1 είναι τόσο μικρή ώστε η ελλειπτική τροχιά του Δ να μη συναντά την κυκλική τροχιά του Άρη, π.χ. όπως η έλλειψη 3 στο σχήμα, η τοποθέτηση του Δ στην τροχιά του Άρη είναι αδύνατη. Όταν όμως η υ_1 είναι αρκετά μεγάλη ώστε η έλλειψη να συναντά, π.χ. στο σημείο Α (βλέπε στο σχήμα), την τροχιά του Άρη, τότε μια διόρθωση $\Delta\upsilon_A$ στην ταχύτητα υ_A στο σημείο Α μπορεί να τοποθετήσει τον Δ στην τροχιά του Άρη με ταχύτητα $\upsilon'_A = \upsilon_A + \Delta\upsilon_A$. Είναι φανερό ότι η ελάχιστη τιμή της υ_1 για να μπορεί να γίνει η τοποθέτηση είναι εκείνη που οδηγεί σε έλλειψη που εφάπτεται στην τροχιά του Άρη, δηλ. που το αφήλιο της βρίσκεται πάνω στην τροχιά του Άρη (έλλειψη 2 στο σχήμα). Η έλλειψη αυτή ονομάζεται τροχιά του Hohmann.

Αν R_Γ και R_A είναι οι ακτίνες των κυκλικών τροχιών της Γης και του Άρη και r_1, r_2 είναι οι αποστάσεις του περιήλιου και του αφήλιου του δορυφόρου, θα είναι

$$r_1 = R_\Gamma = p/(1+e), \qquad r_2 = R_A = p/(1-e)$$

Άρα

$$e = (R_A - R_\Gamma)/(R_A + R_\Gamma) \tag{1}$$

$$\alpha = p/(1-e^2) = (R_A + R_\Gamma)/2 \tag{2}$$

Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν την εκκεντρότητα και τον μεγάλο ημιάξονα της τροχιάς του Hohmann.

Για να υπολογίσουμε και την ταχύτητα υ_1 της τροχιάς αυτής παρατηρούμε ότι η υ_0, που είναι ίση με

$$\upsilon_0 = \upsilon_1 + \upsilon_\Gamma = \upsilon_1 + \sqrt{k/R_\Gamma} \tag{3}$$

είναι ταυτόχρονα και η ταχύτητα στο περιήλιο ($r = R_\Gamma$) της τροχιάς του Hohmann, δηλαδή ισχύει η σχέση

$$\upsilon_0^2 = k\left(\frac{2}{R_\Gamma} - \frac{1}{\alpha}\right) \tag{4}$$

Με τη βοήθεια των προηγούμενων σχέσεων η (4) γίνεται

$$\upsilon_0^2 = k\left(\frac{2}{R_\Gamma} - \frac{1-e^2}{p}\right) = k\left(\frac{2}{R_\Gamma} - \frac{1-e}{R_\Gamma}\right) = 5\frac{k}{R_\Gamma}(1+e) \tag{5}$$

Από τις (3) και (5) προκύπτει

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{k}{R_\Gamma}}(\sqrt{1+e} - 1) = \sqrt{\frac{k}{R_\Gamma}}\left[\sqrt{\frac{2R_A}{R_A + R_\Gamma}} - 1\right]$$

Το ταξίδι του δορυφόρου πάνω στην τροχιά του Hohmann διαρκεί χρόνο $t = T/2$, όπου T είναι η περίοδός της. Άρα,

$$t = \pi\sqrt{\frac{\alpha^3}{k}} = \pi\sqrt{\frac{(R_A + R_\Gamma)^3}{8k}}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των R_A, R_Γ, k βρίσκουμε $t \simeq 8$ μήνες και $\upsilon_1 = 2.8$ km/sec.

✓ 20) Σώμα Α εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης κατακόρυφα προς τα πάνω για να φτάσει σε μέγιστο ύψος h. Δεύτερο ίδιο σώμα Β εκτοξεύεται οριζόντια για να φτάσει στο ίδιο μέγιστο ύψος. Να αποδειχθεί ότι ο λόγος των δύο ταχυτήτων εκτόξευσης είναι ίσος με $\sqrt{h(2R+h)}/(R + h)$, όπου R είναι η ακτίνα της Γης.

Λύση

Από τα ολοκληρώματα της ενέργειας και της στροφορμής προκύπτει ο γνωστός τύπος

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = \text{σταθ.} \tag{1}$$

όπου m και M είναι αντίστοιχα, οι μάζες των σωμάτων και της Γης. Για το σώμα Α οι αρχικές συνθήκες είναι $r = R$, $\upsilon = \upsilon_{10}$ ($L = 0$) και οι «τελικές» είναι $r = R + h$, $\upsilon = 0$ ($L = 0$). Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (1) βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{10}^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R+h}$$

Άρα

$$\upsilon_{10}^2 = 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) \tag{2}$$

Για το σώμα Β οι αρχικές συνθήκες είναι $r = R$, $\upsilon = \upsilon_{20}$ (οπότε $L = mR\upsilon_{20}$) και οι «τελικές» είναι $r = R + h$, $\dot{r} = 0$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (1) βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{20}^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{L^2}{2m(R+h)^2} - \frac{GMm}{R+h} = \frac{m\upsilon_{20}^2}{2}\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 - \frac{GMm}{R+h}$$

Άρα

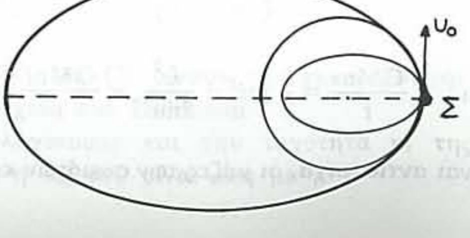
$$\upsilon_{20}^2 = 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)\left[1 - \left(\frac{R}{R+h}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{3}$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\frac{\upsilon_{10}}{\upsilon_{20}} = \frac{\sqrt{h(2R+h)}}{R+h}$$

21) Υλικό σημείο Σ κινείται στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων $F = -k/r^2$ ($k > 0$). Αρχικά βρίσκεται σε απόσταση r_0 από το ελκτικό κέντρο Ο, έχει ταχύτητα υ_0 κάθετη στο διάνυσμα θέσης και αρνητική ενέργεια. Να αποδειχθεί ότι το αρχικό σημείο είναι είτε περίκεντρο είτε απόκεντρο και να βρεθεί τι από τα δύο συμβαίνει για δοσμένη ταχύτητα υ_0.

Λύση



Επειδή η ενέργεια του Σ είναι αρνητική, η τροχιά του είναι γενικά έλλειψη. Επειδή η ταχύτητα του Σ γίνεται κάθετη στο διάνυσμα θέσης μόνο όταν το Σ βρεθεί στο περίκεντρο ή στο απόκεντρο, η αρχική θέση του Σ είναι είτε περίκεντρο είτε απόκεντρο.

Αν η υ_0 είναι ίση με την κυκλική ταχύτητα $\upsilon_c = \sqrt{k/mr_0}$ τότε το Σ διαγράφει περιφέρεια κύκλου με ακτίνα r_0.

Αν υποθέσουμε ότι η αρχική θέση είναι περίκεντρο, θα ισχύουν οι σχέσεις

$$r_0 = r_\pi = \alpha(1-e), \quad \upsilon_0^2 = \upsilon_\pi^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{2}{r_\pi} - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{k}{mr_0}(1+e) = \upsilon_c^2(1+e)$$

Αν υποθέσουμε ότι είναι απόκεντρο, θα ισχύουν οι σχέσεις

$$r_0 = r_\alpha = \alpha(1+e), \quad \upsilon_0^2 = \upsilon_\alpha^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{2}{r_\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{k}{mr_0}(1-e) = \upsilon_c^2(1-e)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\upsilon_\pi > \upsilon_c, \qquad \upsilon_\alpha < \upsilon_c$$

Επομένως, όταν η υ_0 είναι μεγαλύτερη από την κυκλική ταχύτητα υ_c η αρχική θέση είναι περίκεντρο ενώ όταν είναι μικρότερη, η αρχική θέση είναι απόκεντρο.

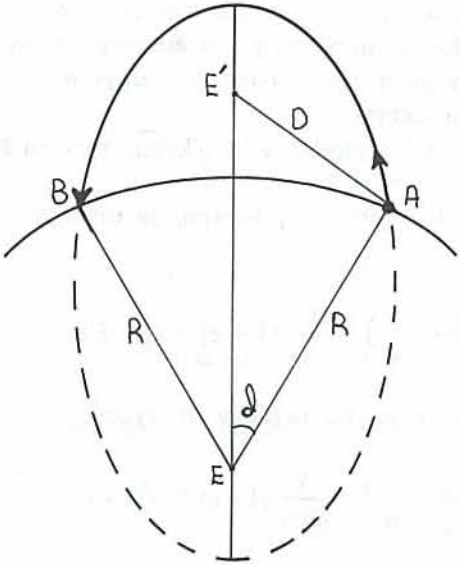
22) Βλήμα εκτοξεύεται από ένα τόπο Α της επιφάνειας της Γης για να χτυπήσει έναν άλλο τόπο Β. Να βρεθεί η τροχιά που πετυχαίνει το σκοπό αυτό με την ελάχιστη ενέργεια.

Λύση

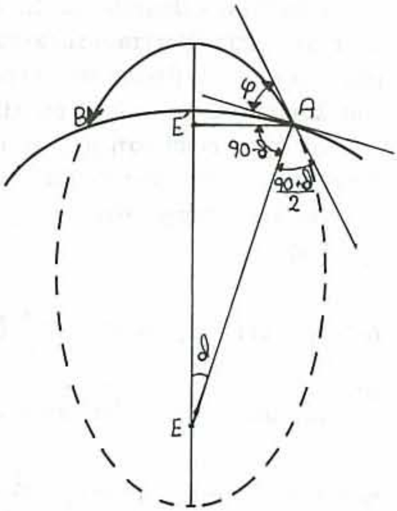
Μια τυχαία τροχιά ανάμεσα στους τόπους Α και Β φαίνεται στο σχήμα 1. Η γωνία ϑ είναι καθορισμένη όταν δοθούν οι τόποι Α και Β. Η εστία Ε της ελλειπτικής τροχιάς του βλήματος είναι το κέντρο της Γης και η άδεια εστία Ε΄ απέχει απόσταση D από τον τόπο Α. Αν α είναι ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς, θα είναι $AE + AE' = R + D = 2\alpha$. Η αρχική ταχύτητα του βλήματος είναι ίση με

$$\upsilon_0^2 = \mu\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{2\mu}{R}\,\frac{1}{1+R/D} \qquad (\mu = GM) \qquad (1)$$

όπου Μ είναι η μάζα της Γης, και η ενέργειά του είναι ίση με



Σχήμα 1. Τυχαία τροχιά



Σχήμα 2. Τροχιά με την ελάχιστη ενέργεια

$$E = m\upsilon_0^2/2 - \mu m/R$$

Επομένως, η ενέργεια E είναι ελάχιστη όταν η ταχύτητα υ_0^2 είναι ελάχιστη. Σύμφωνα με την (1), η υ_0^2 είναι ελάχιστη όταν η απόσταση D είναι ελάχιστη. Αυτό συμβαίνει όταν η AE΄ είναι κάθετη στο μεγάλο ημιάξονα (βλέπε στο σχήμα 2). Στην περίπτωση αυτή είναι $D = R\eta\mu\vartheta$ και η παράμετρος p της τροχιάς είναι ίση με $p = AE' = D$. Επομένως θα είναι

$$\alpha = (R + D)/2 = R(1 + \eta\mu\vartheta)/2 \tag{2}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{\alpha}} = \sqrt{1 - \frac{D}{\alpha}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{1 + \eta\mu\vartheta} \tag{3}$$

Οι τύποι (2) και (3) δίνουν τον μεγάλο ημιάξονα και την εκκεντρότητα της τροχιάς με την ελάχιστη ενέργεια. Από το σχήμα 2 προκύπτει ότι η γωνία εκτόξευσης φ του βλήματος είναι ίση με $\varphi = 45^0 - \vartheta/2$ και από την (1) προκύπτει ότι η αρχική ταχύτητα στην τροχιά με την ελάχιστη ενέργεια είναι ίση με (επειδή $D = R\eta\mu\vartheta$)

$$\upsilon_0^2 = \frac{2\mu}{R}\,\frac{\eta\mu\vartheta}{1 + \eta\mu\vartheta}$$

23) Υλικό σημείο διαγράφει την παραβολική τροχιά $r = p(1 + \sigma\upsilon\nu\vartheta)^{-1}$ στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων $F = -k/r^2$ $(k > 0)$. Να βρεθεί ο χρόνος που χρειάζεται για να κινηθεί από $\vartheta = 0$ μέχρι $\vartheta = \vartheta_1$.

Λύση

Από το ολοκλήρωμα της στροφορμής $L = mr^2\dot{\vartheta}$ προκύπτει ότι

$$\frac{L}{m}\int_0^t dt = \frac{L}{m}\,t = \int_0^{\vartheta_1} r^2 d\vartheta = p^2\int_0^{\vartheta_1}(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)^{-2}d\vartheta = \frac{p^2}{4}\int_0^{\vartheta_1}\tau\varepsilon\mu^4\Big(\frac{\vartheta}{2}\Big)$$

$$d\vartheta = \frac{p^2}{2}\int_0^{\vartheta_1}\tau\varepsilon\mu^2\Big(\frac{\vartheta}{2}\Big)d\Big(\varepsilon\varphi\,\frac{\vartheta}{2}\Big) = \frac{p^2}{2}\Big(\varepsilon\varphi\,\frac{\vartheta_1}{2} + \frac{1}{3}\,\varepsilon\varphi^3\,\frac{\vartheta_1}{2}\Big) \tag{1}$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση $p = 2\alpha = L^2/mk$ η (1) δίνει

$$t = \sqrt{\frac{2m\alpha^3}{k}}\Big(\varepsilon\varphi\,\frac{\vartheta_1}{2} + \frac{1}{3}\,\varepsilon\varphi^3\,\frac{\vartheta_1}{2}\Big)$$

24) Υλικό σημείο Σ κινείται στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων $F = -kr^{-3}(\alpha^2 r^{-2} + 4)$. Αρχικά βρίσκεται στην αψίδα $r = \alpha$ και έχει ταχύτητα $\upsilon_0 = 3\sqrt{2k/m}/2\alpha$. Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του και ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει στο κέντρο Ο των δυνάμεων.

Λύση

Η Δ.Ε της τροχιάς είναι

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = -\frac{mF}{u^2L^2} \qquad (u = 1/r) \tag{1}$$

Στην περίπτωσή μας είναι

$$F = -ku^3(\alpha^2u^2 + 4), \qquad L = m\alpha\upsilon_0 = 3\sqrt{2mk}/2$$

Άρα η (1) γίνεται

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + \frac{1}{9}\,u = \frac{2}{9}\,\alpha^2u^3 \tag{2}$$

Πολ/ζοντας την (2) επί $du/d\vartheta$ και ολοκληρώνοντας ως προς ϑ βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{du}{d\vartheta}\Big)^2 + \frac{1}{18}\,u^2 = \frac{\alpha^2}{18}\,u^4 + c \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες $u = \alpha^{-1}$, $du/d\vartheta = 0$ στην (3) βρίσκουμε ότι η σταθερή c της ολοκλήρωσης είναι ίση με μηδέν. Επομένως η (3) γίνεται

$$(du/d\vartheta)^2 = u^2(\alpha^2u^2 - 1)/9 \tag{4}$$

Επειδή το πρώτο μέλος της (4) είναι θετικό, θα είναι $\alpha u > 1$. Άρα από την (4) προκύπτει

$$du/d\vartheta = +u\,\frac{\sqrt{\alpha^2u^2 - 1}}{3}$$

ή

$$\int_0^{\vartheta} d\left(\frac{\vartheta}{3}\right) = \int_{\alpha^{-1}}^{u} \frac{du}{u\sqrt{\alpha^2u^2 - 1}} = -\int_{\alpha}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}}$$

ή

$$r = \alpha\,\text{συν}(\vartheta/3) \tag{5}$$

Αυτή είναι η εξίσωση της τροχιάς του Σ.

Το Σ φτάνει στο ελκτικό κέντρο Ο τη στιγμή $t = \tau$ που θα γίνει $r = 0$, δηλαδή (σύμφωνα με την 5) όταν $\vartheta = 3\pi/2$. Από το ολοκλήρωμα της στροφορμής

$$L = mr^2 d\vartheta/dt = 3\sqrt{2mk}/2$$

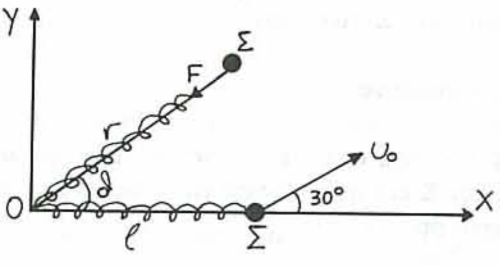
βρίσκουμε ότι ο χρόνος τ είναι ίσος με

$$\int_0^{\tau} dt = \tau = mL^{-1}\int_0^{3\pi/2} r^2 d\vartheta = \frac{\alpha^2}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}}\int_0^{3\pi/2} \text{συν}^2\left(\frac{\vartheta}{3}\right)d\vartheta = \pi\alpha^2\sqrt{\frac{m}{8k}}$$

25) Υλικό σημείο Σ με μάζα m μπορεί να κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο XOY. Το Σ συνδέεται με το Ο με ένα ελατήριο που έχει σταθερά k και φυσικό μήκος l. Αρχικά, το Σ εκτοξεύεται από το σημείο $x = l$ του άξονα OX με ταχύτητα υ_0 που σχηματίζει γωνία 30^0 με τον άξονα OX. Αν το μέγιστο μήκος του ελατηρίου κατά την κίνησή του είναι ίσο με 3l, να αποδειχθεί ότι $\upsilon_0^2 = 144kl^2/35m$.

Λύση

Στο Σ ενεργεί η δύναμη του ελατηρίου που είναι ίση με $F = -k(r - l)$ και περνάει πάντοτε από το σημείο Ο. Άρα η κίνηση του Σ είναι κεντρική



με κέντρο το Ο. Τα ολοκληρώματα της ενέργειας και της στροφορμής είναι

$$E = m\upsilon^2/2 + k(r - l)^2/2 = m\upsilon_0^2/2 \tag{1}$$

$$L = ml\upsilon_0 \eta\mu 30^0 = ml\upsilon_0/2 \tag{2}$$

Όταν το r γίνει μέγιστο, $r_{max} = 3l$, η ταχύτητα υ του Σ είναι κάθετη στο **r** και η στροφορμή είναι ίση με

$$L = m\upsilon r_{max} = 3m\upsilon l \tag{3}$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι $\upsilon = \upsilon_0/6$, οπότε η (1) δίνει (για $r = 3l$ και $\upsilon = \upsilon_0/6$) $\upsilon_0^2 = 144kl^2/35m$.

26) Δορυφόρος της Γης καθώς κινείται σε ελλειπτική τροχιά πυροδοτεί στιγμιαία τους πυραύλους του με αποτέλεσμα να μεταβληθεί λίγο η ταχύτητά του χωρίς όμως να αλλάξει η διεύθυνσή της. Να βρεθούν οι μεταβολές δα του μεγάλου ημιάξονα, δε της εκκεντρότητας και δT της περιόδου.

Λύση

Η μεταβολή δυ του μέτρου της ταχύτητας συμβαίνει στιγμιαία, πριν προλάβει να μεταβληθεί η θέση (r, ϑ) του δορυφόρου. Επομένως, από το γνωστό τύπο της ταχύτητας

$$\upsilon^2 = k(2/r - 1/\alpha) \qquad (k = GM) \tag{1}$$

προκύπτει (για r = σταθ.) ότι $2\upsilon\delta\upsilon = k\alpha^{-2}\delta\alpha$. Άρα

$$\delta\alpha = 2k^{-1}\alpha^2\upsilon\delta\upsilon \tag{2}$$

όπου η υ δίνεται από την (1).

Η στροφορμή του Σ είναι ίση με

$$L = m\upsilon r \sigma\upsilon\nu\varphi \tag{3}$$

όπου η γωνία φ ανάμεσα στα **r** και υ δεν αλλάζει κατά την πυροδότηση επειδή η θέση **r** του Σ και η διεύθυνση της υ δεν αλλάζουν. Επομένως από την (3) προκύπτει ότι

$$\delta L = m r \sigma\upsilon\nu\varphi\, \delta\upsilon \qquad ή \qquad \delta L/L = \delta\upsilon/\upsilon \tag{4}$$

Από το γνωστό τύπο $L^2 = m^2 k\alpha(1 - e^2)$ προκύπτει ότι

$$2\ln L = \ln m^2 k + \ln\alpha + \ln(1 - e^2)$$

Άρα

$$2\,\frac{\delta L}{L} = \frac{\delta\alpha}{\alpha} - \frac{2e\delta e}{1 - e^2}$$

ή

$$\delta e = \left(\frac{\delta\alpha}{\alpha} - 2\,\frac{\delta L}{L}\right)\left(\frac{1 - e^2}{2e}\right) \tag{5}$$

όπου τα δα και δL δίνονται από τις (2) και (4).

Από το γνωστό τύπο $T^2 = 4\pi^2 k^{-1}\alpha^3$ προκύπτει ότι

$$2T\delta T = 4\pi^2 k^{-1} 3\alpha^2 \delta\alpha \qquad ή \qquad \delta T = 6\pi^2\alpha^2(kT)^{-1}\delta\alpha \tag{6}$$

Παρατήρηση. Οι τύποι (2), (5), (6) είναι προσεγγιστικοί. Οι μεταβολές δα, δe, δT είναι αρκετά μικρές (από τη φυσική άποψη) ώστε να μπορούμε να τις εξισώσουμε, χωρίς μεγάλο σφάλμα, με τα διαφορικά dα, de, dT. Γι' αυτό, η προσεγγιστική εύρεση των μεταβολών έγινε εδώ με διαφόριση των αντίστοιχων τύπων.

27) Σώμα με μάζα m πέφτει στον Ήλιο. Να βρεθεί η μεταβολή που προκαλείται στη διάρκεια του έτους.

Λύση

Η χρονική διάρκεια του έτους είναι ίση με την περίοδο T της κίνησης της Γης γύρω από τον Ήλιο. Η πτώση της m μεταβάλλει τη μάζα M του Ήλιου απότομα πριν προλάβει να μεταβληθεί η θέση **r** και η ταχύτητα υ της Γης. Από το γνωστό τύπο

$$\frac{\upsilon^2}{GM} = \frac{2}{r} - \frac{1}{\alpha} \tag{1}$$

προκύπτει ότι, για $\upsilon^2 =$ σταθ. και $r =$ σταθ., οι μικρές μεταβολές $\delta M = m$ και $\delta\alpha$ συνδέονται με τη σχέση

$$-\upsilon^2 \frac{\delta M}{GM} = \frac{\delta\alpha}{\alpha^2} \qquad \text{ή} \qquad \delta\alpha = -\alpha^2 \frac{m}{M}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\alpha}\right) \tag{2}$$

Από τον γνωστό τύπο $T^2 = 4\pi^2\alpha^3(GM)^{-1}$ προκύπτει ότι

$$2\ln T = \ln 4\pi^2 + 3\ln\alpha - \ln GM$$

Άρα

$$2\,\frac{\delta T}{T} = \frac{3\delta\alpha}{\alpha} - \frac{m}{M}$$

ή

$$\delta T = \frac{T}{2}\left(\frac{3\delta\alpha}{\alpha} - \frac{m}{M}\right) \tag{3}$$

όπου το $\delta\alpha$ δίνεται από την (2). Ο τύπος (3) δίνει τη μεταβολή της διάρκειας του έτους με την προϋπόθεση ότι η μάζα m είναι πολύ μικρή σε σχέση με τη μάζα M του Ήλιου, δηλ. $m \ll M$. Αν η m δεν είναι τόσο μικρή δεν έχει νόημα η διαφόριση του τύπου (1). Στην περίπτωση αυτή η σταθερότητα των υ^2 και r πριν και μετά την πτώση εκφράζεται από την εξίσωση

$$\upsilon^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\alpha}\right) = G(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\alpha'}\right)$$

Άρα ο μεγάλος ημιάξονας α' της τροχιάς της Γης μετά την πτώση είναι ίσος με

$$\alpha' = \alpha r(M+m)(Mr + 2\alpha m)^{-1} \tag{4}$$

Η νέα περίοδος της κίνησης της Γης θα είναι ίση με

$$T' = 2\pi(\alpha')^{3/2}/\sqrt{G(M+m)} \tag{5}$$

όπου το α' δίνεται από την (4). Επομένως, η μεταβολή στη διάρκεια του έτους είναι ίση με $\Delta T = T' - T$ όπου το T' δίνεται από την (5).

28) Υλικό σημείο Σ διαγράφει παραβολική τροχιά στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων $F = -k/r^2$ $(k > 0)$. Όταν το Σ βρεθεί στην ελάχιστη απόσταση από το ελκτικό κέντρο η ταχύτητά του ξαφνικά υποδιπλασιάζεται. Να αποδειχθεί ότι η νέα τροχιά είναι έλλειψη με εκκεντρότητα $\sqrt{5/8}$.

Λύση

Όταν το Σ βρεθεί στην ελάχιστη απόσταση, θα είναι

$$r = r_{min} = p = 2\alpha, \qquad \upsilon^2 = \upsilon_0^2 = 2k/mr_{min} = k/m\alpha, \qquad L^2 = L_0^2 = 2\alpha mk$$

Μετά τον υποδιπλασιασμό της ταχύτητας υ_0, η νέα τιμή της ενέργειας του Σ είναι

$$E = \frac{1}{2}\, m\left(\frac{\upsilon_0}{2}\right)^2 - \frac{k}{2\alpha} = \frac{k}{8\alpha} - \frac{k}{2\alpha} = -\frac{3k}{8\alpha} < 0$$

Επειδή είναι $E < 0$, η νέα τροχιά είναι έλλειψη. Η νέα τιμή της στροφορμής είναι

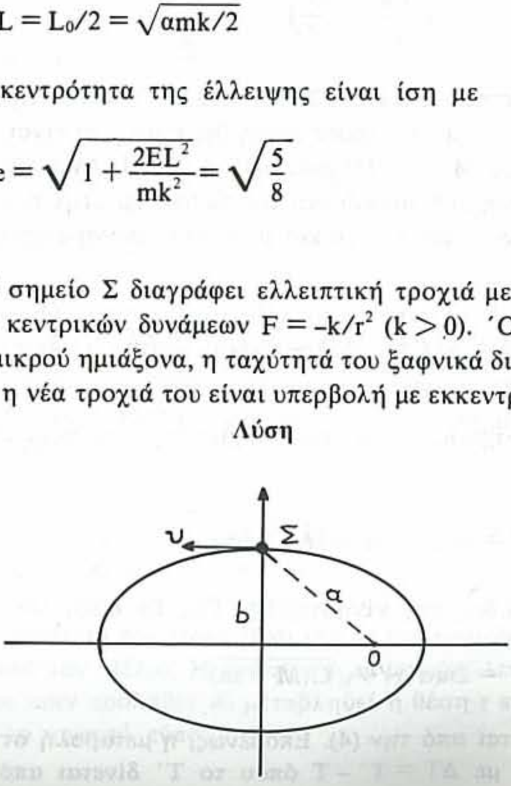
$$L = L_0/2 = \sqrt{\alpha mk/2}$$

Άρα η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι ίση με

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} = \sqrt{\frac{5}{8}}$$

29) Υλικό σημείο Σ διαγράφει ελλειπτική τροχιά με εκκεντρότητα e στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων $F = -k/r^2$ $(k > 0)$. Όταν το Σ βρεθεί στο άκρο του μικρού ημιάξονα, η ταχύτητά του ξαφνικά διπλασιάζεται. Να αποδειχθεί ότι η νέα τροχιά του είναι υπερβολή με εκκεντρότητα $\sqrt{9 - 8e^2}$.

Λύση



΄Οταν το Σ βρεθεί στο άκρο του μικρού ημιάξονα είναι $r = \alpha$ οπότε η ταχύτητά του είναι ίση με

$$\upsilon^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{k}{m\alpha}$$

Μετά το διπλασιασμό, η νέα ταχύτητα είναι ίση με $\upsilon_0 = 2\upsilon = \sqrt{4k/m\alpha}$ Επομένως η νέα ενέργεια του Σ είναι

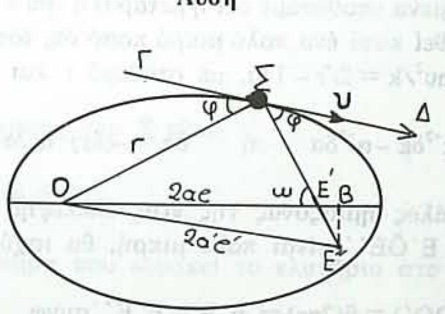
$$E = m\upsilon_0^2/2 - k/\alpha = 2k/\alpha - k/\alpha = k/\alpha > 0$$

Επειδή $E > 0$, η νέα τροχιά του Σ θα είναι υπερβολή. Η νέα τιμή της στροφορμής είναι ίση με $L = mb\upsilon_0 = mb\sqrt{4k/m\alpha}$. Επομένως, η εκκεντρότητα της υπερβολικής τροχιάς είναι ίση με

$$e' = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + 8\,\frac{b^2}{\alpha^2}} = \sqrt{1 + 8(1 - e^2)} = \sqrt{9 - 8e^2}$$

30) Υλικό σημείο Σ κινείται σε ελλειπτική τροχιά στο πεδίο των κεντρικών δυνάμεων $F = -k/r^2$ $(k > 0)$. Ξαφνικά, η ένταση της δύναμης, δηλ. η σταθερή k, μεταβάλλεται σε k'. Αν η νέα τροχιά του Σ είναι πάλι ελλειπτική, να βρεθεί ο μεγάλος ημιάξονας και η εκκεντρότητά της.

Λύση



Επειδή η μεταβολή συμβαίνει στο ελκτικό κέντρο Ο, το μέτρο και η διεύθυνση της ταχύτητας του Σ δεν αλλάζουν. Επειδή δεν αλλάζει ούτε η θέση του ελκτικού κέντρου Ο, το Ο εξακολουθεί να είναι εστία και για τη νέα έλλειψη. Η άδεια εστία E'' της νέας έλλειψης πρέπει να βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\Sigma E'$: πράγματι, όπως είναι γνωστό, η εφαπτομένη στο σημείο Σ της έλλειψης σχηματίζει ίσες γωνίες με τις επιβατικές ακτίνες που ξεκινούν από τις δύο εστίες Ο και Ε΄, δηλ. $O\hat{\Sigma}\Gamma = E'\hat{\Sigma}\Delta = \varphi$. Στη νέα έλλειψη, η θέση του Σ και της Ο καθώς και η διεύθυνση ΓΔ της ταχύτητας είναι ίδιες όπως στην αρχική. Επομένως η νέα άδεια εστία Ε΄΄ πρέπει να βρίσκεται σε τέτοια θέση ώστε να είναι $O\hat{\Sigma}\Gamma = E''\hat{\Sigma}\Delta = \varphi$, δηλ. η Ε΄΄ πρέπει να βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΣΕ΄.

Επειδή τα υ^2 και r δε μεταβάλλονται, θα έχουμε

$$\upsilon^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{k'}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\alpha'}\right)$$

Άρα, ο μεγάλος ημιάξονας της νέας έλλειψης είναι ίσος με

$$\alpha' = k'\alpha r[kr + 2(k' - k)\alpha]^{-1} \qquad (1)$$

Είναι $O\hat{\Sigma}E = \pi - 2\varphi$ και για το τρίγωνο ΟΕ΄΄Σ ισχύει η σχέση

$$(OE'')^2 = (O\Sigma)^2 + (E''\Sigma)^2 + 2(O\Sigma)(E''\Sigma)\sigma\upsilon\nu 2\varphi \qquad (2)$$

Επειδή $O\Sigma = r$, $OE'' = 2\alpha' e'$, $E''\Sigma = 2\alpha' - r$ η (2) δίνει τελικά ότι η εκκεντρότητα της νέας έλλειψης είναι ίση με

$$e' = (2\alpha')^{-1}[r^2 + (2\alpha' - r)^2 + 2r(8\alpha' - r)\sigma\upsilon\nu 2\varphi]^{1/2}$$

Στα προηγούμενα υποθέσαμε ότι η μεταβολή του k είναι πεπερασμένη. Αν το k μεταβληθεί κατά ένα πολύ μικρό ποσό δk, τότε διαφορίζοντας τη γνωστή σχέση $m\upsilon^2/k = 2/r - 1/\alpha$, με σταθερό r και υ^2, βρίσκουμε

$$-m\upsilon^2 k^{-2}\delta k - \alpha^{-2}\delta\alpha \qquad \text{ή} \qquad \delta\alpha = -(kr)^{-1}\alpha(2\alpha - r)\delta k$$

Άρα, ο μεγάλος ημιάξονας της νέας έλλειψης είναι $\alpha' \simeq \alpha + \delta\alpha$. Επειδή η γωνία $E'\hat{O}E''$ είναι πολύ μικρή, θα ισχύει η προσέγγιση

$$\delta(OO') = \delta(2\alpha e) \simeq E'B = E'E''\sigma\upsilon\nu\omega \qquad (3)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις γνωστές σχέσεις

$$O\Sigma + \Sigma E'' = 2\alpha', \qquad O\Sigma + \Sigma E' = 2\alpha$$

βρίσκουμε

$$\Sigma E'' - \Sigma E' = E'E'' = 2\alpha' - 2\alpha = 2\delta\alpha \qquad (4)$$

Επίσης είναι

$$\delta(2\alpha e) = 2\alpha\delta e + 2e\delta\alpha \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας τις (4) και (5) στην (3) βρίσκουμε

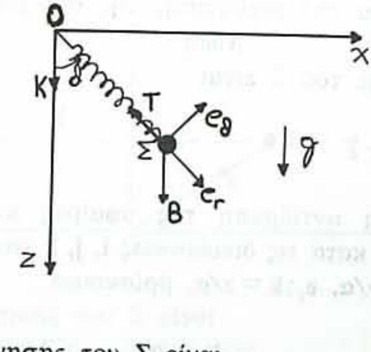
$$\delta e = \alpha^{-1}[\sigma\upsilon\nu\omega - e]\delta\alpha$$

όπου η γωνία ω καθορίζεται από τη θέση που βρίσκεται το Σ όταν γίνεται η μεταβολή του Κ. Άρα, η εκκεντρότητα της νέας έλλειψης είναι $e' \simeq e + \delta e$.

γ) Πολυδιάστατη κίνηση

1) Το ένα άκρο ελατηρίου στερεώνεται σε ακίνητο σημείο Ο ενώ το άλλο άκρο του συνδέεται με σώμα Σ που μπορεί να κινείται ελεύθερα στο κατακόρυφο επίπεδο Oxz. Να βρεθούν οι Δ.Ε της κίνησης του Σ.

Λύση



Η Δ.Ε της κίνησης του Σ είναι

$$m\gamma = B + T \tag{1}$$

όπου T είναι η δύναμη που εξασκεί το ελατήριο στο Σ. Είναι

$$\gamma = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)e_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta})e_\vartheta$$

$$B = mgk = mg(\sigma\upsilon\nu\vartheta e_r - \eta\mu\vartheta e_\vartheta) \tag{2}$$

$$T = -k(r - l)e_r$$

όπου k και l είναι η σταθερή και το φυσικό μήκος του ελατηρίου.

Αντικαθιστώντας τις (2) στην (1) και παίρνοντας τις προβολές κατά τις διευθύνσεις των $\mathbf{e}_r$ και $\mathbf{e}_\vartheta$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 &= mg\sigma\upsilon\nu\vartheta - k(r-l) \\ r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} &= -g\eta\mu\vartheta \end{aligned} \qquad (3)$$

Οι (3) είναι οι Δ.Ε της κίνησης του Σ. Επειδή οι δυνάμεις **B**, **T** είναι συντηρητικές, υπάρχει το ολοκλήρωμα της ενέργειας

$$E = T + V = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}\, k(r-l)^2 - mgr\sigma\upsilon\nu\vartheta = \sigma\tau\alpha\theta.$$

2) Υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω στη λεία επιφάνεια της σφαίρας $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$ με την επίδραση της δύναμης $\mathbf{F} = \alpha_1 x^{-3}\mathbf{i} + \alpha_2 y^{-3}\mathbf{j} + \alpha_3 z^{-3}\mathbf{k}$ όπου α_1, α_2, α_3 είναι σταθερές. Να αποδειχθεί ότι το μέτρο της αντίδρασης της σφαίρας είναι σταθερό.

Λύση

Η Δ.Ε της κίνησης του Σ είναι

$$m\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R} + \mathbf{F} \qquad (1)$$

όπου $\mathbf{R} = R\mathbf{e}_r$ είναι η αντίδραση της σφαίρας και $\boldsymbol{\gamma} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$. Προβάλλοντας την (1) κατά τις διευθύνσεις **i**, **j**, **k** και παίρνοντας υπόψη ότι $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{i} = x/\alpha$, $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j} = y/\alpha$, $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{k} = z/\alpha$, βρίσκουμε

$$m\ddot{x} = R\,\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha_1}{x^3}, \qquad m\ddot{y} = R\,\frac{y}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{x^3}, \qquad m\ddot{z} = R\,\frac{z}{\alpha} + \frac{\alpha_3}{z^3} \qquad (2)$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές διαδοχικά ως προς t την εξίσωση της σφαίρας βρίσκουμε

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0 \qquad (3)$$

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0 \qquad (4)$$

Από τις (2) και (3) βρίσκουμε

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}) = R + \frac{\alpha_1}{x^2} + \frac{\alpha_2}{y^2} + \frac{\alpha_3}{z^2} \qquad (5)$$

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \frac{\alpha_1 \dot{x}}{x^3} + \frac{\alpha_2 \dot{y}}{y^3} + \frac{\alpha_3 \dot{z}}{z^3} \tag{6}$$

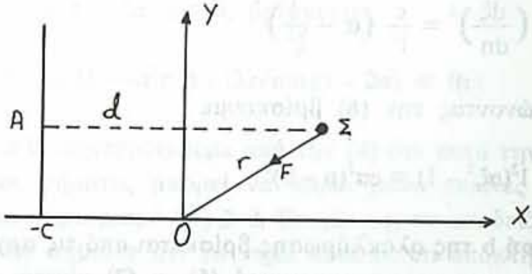
Ολοκληρώνοντας μια φορά την (6) βρίσκουμε

$$m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -\frac{\alpha_1}{x^2} - \frac{\alpha_2}{y^2} - \frac{\alpha_3}{z^2} + \sigma\tau\alpha\theta. \tag{7}$$

Από τις (4), (5), (7) προκύπτει ότι $R = \sigma\tau\alpha\theta.$

3) Υλικό σημείο Σ κινείται στο λείο επίπεδο xy με την επίδραση ελκτικής δύναμης που διευθύνεται πάντα προς την αρχή O των αξόνων και έχει μέτρο ίσο με $md^{-3}r$, όπου m είναι η μάζα του Σ, $r = O\Sigma$ και d είναι η απόσταση του Σ από την ευθεία $x = -c$ $(c > 0)$. Αρχικά το Σ βρίσκεται σε θέση $x_0 > -c$. Να βρεθεί η τροχιά του Σ.

Λύση



Η Δ.Ε της κίνησης του Σ είναι

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -md^{-3}\mathbf{r} \qquad (d = x + c)$$

Προβάλλοντας την εξίσωση αυτή στους άξονες x και y βρίσκουμε

$$\ddot{x} = -x/(x + c)^3 \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -y/(x + c)^3 \tag{2}$$

Πολ/ζοντας την (1) επί $\dot{x}$ και ολοκληρώνοντας καταλήγουμε στο παρακάτω ολοκλήρωμα της κίνησης

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2c}\left(\frac{x}{x + c}\right)^2 = \sigma\tau\alpha\theta. \equiv \frac{\alpha}{2c} \tag{3}$$

όπου α είναι θετική σταθερή που η τιμή της υπολογίζεται με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών.

Επειδή η δύναμη F περνάει από το Ο, η στροφορμή του Σ ως προς το Ο διατηρείται σταθερή, δηλ.

$$m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{σταθ.} \equiv ml \tag{4}$$

όπου η σταθερή l υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Κάνοντας το μετασχηματισμό

$$\xi = (x + c)/x, \qquad n = y/x \tag{5}$$

τα ολοκληρώματα (3) και (4) της κίνησης γίνονται

$$x^4\dot{\xi}^2 = c(\alpha - \xi^{-2}), \qquad x^2\dot{n} = l$$

Άρα

$$\left(\frac{d\xi}{dn}\right)^2 = \frac{c}{l^2}\left(\alpha - \frac{1}{\xi^2}\right) \tag{6}$$

Ολοκληρώνοντας την (6) βρίσκουμε

$$l^2(\alpha\xi^2 - 1) = c\alpha^2(n - b)^2 \tag{7}$$

όπου η σταθερή b της ολοκλήρωσης βρίσκεται από τις αρχικές συνθήκες. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού (5), η (7) γίνεται

$$\alpha l^2(x + c)^2 = c\alpha^2(y - bx)^2 + l^2x^2 \tag{8}$$

Η τροχιά (8) είναι μια κωνική τομή που δεν τέμνει την ευθεία $x = -c$.

4) Το ένα άκρο ελαστικού νήματος συνδέεται με σταθερό σημείο Ο ενός λείου οριζόντιου επιπέδου Π και το άλλο άκρο με υλικό σημείο Σ που έχει μάζα m και μπορεί να κινείται πάνω στο Π. Το νήμα έχει φυσικό μήκος α και μέτρο λ. Το Σ εκτοξεύεται από απόσταση $r = ΟΣ = 2\alpha$ με ταχύτητα u κάθετη στο νήμα ΟΣ. Να αποδειχθεί ότι το νήμα ποτέ δε θα αποκτήσει το φυσικό μήκος του αν περισσότερο από το 1/4 της ολικής ενέργειας Ε του Σ είναι αρχικά κινητική ενέργεια. Αν το 1/5 της Ε είναι αρχικά κινητική ενέργεια και αν σε κάποια στιγμή το νήμα αποκτήσει το

φυσικό μήκος του, να αποδειχθεί ότι θα παραμένει μαζεμένο επί χρόνο $(4/5)\sqrt{m\alpha/\lambda}$.

Λύση

Η έλξη του νήματος είναι ίση με $-(\lambda/\alpha)(r-\alpha)$ και διευθύνεται πάντοτε προς το Ο. Άρα η κίνηση του Σ είναι κεντρική. Επομένως η προβολή της Δ.Ε της κίνησης κατά την ακτινική διεύθυνση e_r και το ολοκλήρωμα της στροφορμής είναι

$$m(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2) = -(\lambda/\alpha)(r-\alpha) \tag{1}$$

$$mr^2\dot{\vartheta} = \text{σταθ.} = 2m\alpha u \tag{2}$$

Λύνοντας την (2) ως προς $\dot{\vartheta}$ και αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε

$$\ddot{r} - 4\alpha^2u^2r^{-3} + (\lambda/m\alpha)(r-\alpha) = 0 \tag{3}$$

Πολ/ζοντας την (3) επί $\dot{r}$, ολοκληρώνοντάς τη και παίρνοντας υπόψη ότι για $t=0$ είναι $r=2\alpha$, $\dot{r}=0$, βρίσκουμε

$$\dot{r}^2 = u^2(1-4\alpha^2r^{-2}) - (\lambda r/m\alpha)(r-2\alpha) \equiv f(r) \tag{4}$$

Επειδή $\dot{r}^2 \geqslant 0$, συμπεραίνουμε από την (4) ότι κατά την κίνηση του Σ το μήκος r του νήματος μπορεί να πάρει μόνο εκείνες τις τιμές που ικανοποιούν τον περιορισμό $f(r) \geqslant 0$. Επομένως, αν αποδείξουμε ότι είναι $f(\alpha) < 0$, αυτό θα σήμαινε ότι το νήμα ποτέ δε θα αποκτήσει το φυσικό μήκος του $r=\alpha$.

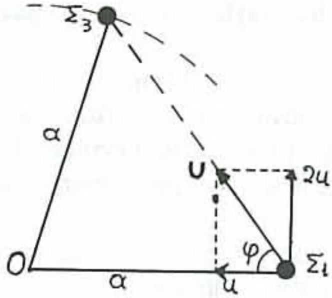
Από την (4) προκύπτει ότι $f(\alpha) = -3u^2 + \lambda\alpha/m$. Για να είναι $f(\alpha) < 0$ πρέπει να είναι $u^2 > \lambda\alpha/3m$. Η δυναμική ενέργεια τάσης του νήματος είναι $(\alpha/2\lambda)(r-\alpha)^2$. Άρα η αρχική ενέργεια του Σ είναι

$$E_0 = T_0 + V_0 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\alpha = \frac{1}{2}m\left(u^2 + \frac{\lambda\alpha}{m}\right)$$

Αν λοιπόν είναι $u^2 > \lambda\alpha/3m$, τότε θα είναι

$$T_0 > \frac{1}{3}V_0 \quad \text{ή} \quad T_0 > \frac{1}{4}E_0 \tag{5}$$

Ώστε, όταν ισχύει ο περιορισμός (5) το νήμα ποτέ δεν αποκτά το φυσικό μήκος του.



Υποθέτουμε τώρα ότι είναι $T_0 = (1/5)E_0$. Τότε θα είναι $T_0 = (1/4)V_0$, δηλ. $4u^2 = \lambda\alpha/m$. Αν υποθέσουμε ότι το νήμα αρχίζει να μαζεύεται στο σημείο Σ_1 (όπου έχει ταχύτητα υ), το υλικό σημείο θα συνεχίσει να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά μέχρι τη θέση εκείνη Σ_3 όπου το νήμα θα αποκτήσει πάλι το φυσικό μήκος του, δηλ. $O\Sigma_3 = \alpha$ (βλέπε στο σχήμα).

Από την (4) προκύπτει ότι στη θέση Σ_1 η ακτινική συνιστώσα $\dot{r}$ της ταχύτητας υ είναι ίση με $-u$ και από την (2) προκύπτει ότι η εγκάρσια συνιστώσα $r\dot{\vartheta}$ της υ είναι ίση με $2u$. Επομένως θα είναι

$$\upsilon = \sqrt{u^2 + (2u)^2} = u\sqrt{5} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\varphi = 2u/u = 2$$

Άρα ο χρόνος που χρειάζεται το Σ για να πάει από το Σ_1 στο Σ_3 είναι ίσος με

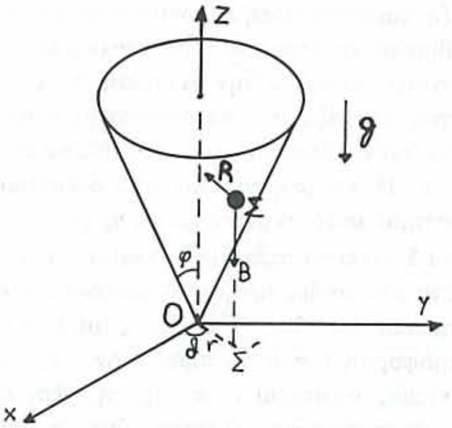
$$t = \frac{\Sigma_1\Sigma_3}{\upsilon} = \frac{2\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi}{\upsilon} = \frac{2\alpha}{\upsilon\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\varphi}} = \frac{2\alpha}{5u} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{m\alpha}{\lambda}}$$

5) Υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται με την επίδραση του βάρους του πάνω στη λεία επιφάνεια του κώνου που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1. Να βρεθούν τα όρια της κίνησης.

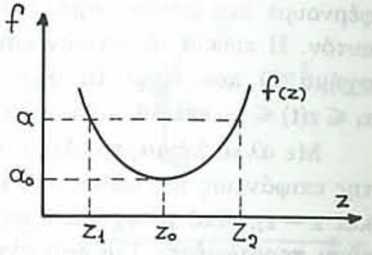
Λύση

Για να βρούμε τα όρια της κίνησης θα χρησιμοποιήσουμε τα ολοκληρώματα της κίνησης. Στο Σ ενεργεί το βάρος του **B** και η αντίδραση **R** του κώνου η οποία είναι κάθετη στην επιφάνειά του. Επειδή η ροπή των **B** και **R** ως προς τον άξονα z είναι μηδενική, η στροφορμή του Σ ως προς τον άξονα z διατηρείται σταθερή, δηλ.

$$mr^2\dot{\vartheta} = \sigma\tau\alpha\theta \equiv L \tag{1}$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Το ολοκλήρωμα της ενέργειας είναι

$$\frac{1}{2}\,m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \sigma\tau\alpha\theta. \equiv E \tag{2}$$

Η εξίσωση του κώνου είναι

$$r = \varepsilon\varphi\varphi z \rightarrow \dot{r} = \varepsilon\varphi\varphi\dot{z} \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας τα r, $\dot{r}$, $\dot{\vartheta}$ από τις (1), (3) στην (2) και λύνοντας ως προς $\dot{z}^2$ βρίσκουμε

$$\dot{z}^2 = \alpha - f(z) \tag{4}$$

όπου

$$f(z) = bz + c/z^2$$

και

$$\alpha = 2E\sigma\upsilon\nu^2\varphi/m, \qquad b = 2g\sigma\upsilon\nu^2\varphi, \qquad c = m^{-2}L^2\sigma\upsilon\nu^4\varphi\,\eta\mu^{-2}\varphi \tag{4′}$$

Επειδή είναι $\dot{z}^2 \geqslant 0$, πρέπει σύμφωνα με την (4) να είναι

$$f(z) \leqslant \alpha \tag{5}$$

Η γραφική παράσταση της f(z), όταν $L \neq 0$, φαίνεται στο σχήμα 2. Για δοσμένες αρχικές συνθήκες υπολογίζουμε την ενέργεια E και τη στροφορμή L από τις (2), (1) και μετά υπολογίζουμε τις σταθερές α, c από τις (4′)

και σχεδιάζουμε την καμπύλη f(z) (η καμπύλη αυτή εξαρτιέται από το c, δηλ. από τη στροφορμή L). Για να βρούμε τα όρια του z που αντιστοιχούν στις δοσμένες αρχικές συνθήκες λύνουμε γραφικά την ανίσωση (5), δηλ. φέρνουμε μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα z σε απόσταση α απ' αυτόν. Η ευθεία τέμνει την καμπύλη f(z) σε δύο σημεία z_1, z_2 (βλέπε στο σχήμα 2) που είναι τα όρια του z. Η κίνηση γίνεται στο διάστημα $z_1 \leqslant z(t) \leqslant z_2$ επειδή μόνο στο διάστημα αυτό ικανοποιείται η (5).

Με άλλα λόγια, το υλικό σημείο Σ κινείται πάνω στη λωρίδα εκείνη της επιφάνειας του κώνου που κόβεται από τα δύο οριζόντια επίπεδα $z = z_1$ και $z = z_2$. Από το σχήμα 2 παρατηρούμε ότι όλες οι κινήσεις (με $L \neq 0$) είναι περατωμένες. Για δοσμένη στροφορμή $L \neq 0$, το πλάτος $\Delta z = z_2 - z_1$ της επιτρεπτής λωρίδας αυξάνεται καθώς αυξάνεται το α, δηλ. η ενέργεια Ε. Όταν η Ε πάρει την τιμή που αντιστοιχεί στο ελάχιστο ύψος α_0 της f(z), τότε τα όρια z_1, z_2 ταυτίζονται ($z_1 = z_2 = z_0 = \sqrt[3]{L^2/m^2 g}$). Επομένως το πλάτος της επιτρεπτής λωρίδας μηδενίζεται και το Σ κινείται πάνω στην περιφέρεια κύκλου που είναι η τομή του κώνου με το επίπεδο $z = z_0$.

Όταν η στροφορμή L είναι μηδενική, τότε από την (1) προκύπτει ότι $\dot{\vartheta}(0) = \dot{\vartheta}(t) = 0$, δηλ. ότι το Σ κινείται πάνω σε μια γενέτειρα του κώνου.

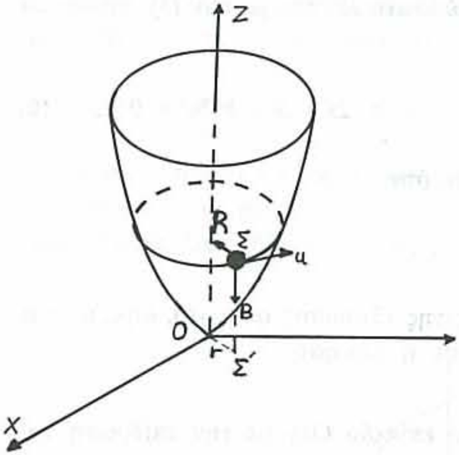
6) Υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται με την επίδραση του βάρους του πάνω στη λεία εσωτερική επιφάνεια του παραβολοειδούς $x^2 + y^2 = 4\alpha z$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1. Το Σ ενώ διαγράφει οριζόντια περιφέρεια με ακτίνα 2α και σταθερή ταχύτητα u, ξαφνικά αποκτά ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{\alpha g}$ που εφάπτεται στο παραβολοειδές και βρίσκεται πάνω στο κατακόρυφο επίπεδο που περνάει από τον άξονα z. Να αποδειχθεί ότι η νέα τροχιά του Σ βρίσκεται στη λωρίδα εκείνη του παραβολοειδούς που κόβεται από τα οριζόντια επίπεδα $z = \alpha/2$ και $z = 2\alpha$.

Λύση

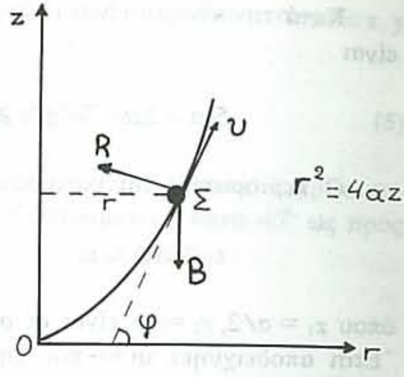
Για να βρούμε τα όρια της κίνησης θα χρησιμοποιήσουμε τα ολοκληρώματα της κίνησης. Στο Σ ενεργεί το βάρος του **B** και η αντίδραση **R** που είναι κάθετη στο παραβολοειδές και περνάει από τον άξονα z. Επειδή η ροπή των **B**, **R** ως προς τον άξονα z είναι μηδενική, η στροφορμή του Σ ως προς τον άξονα z διατηρείται σταθερή, δηλ.

$$mr^2\dot{\vartheta} = \sigma\tau\alpha\theta. \equiv L \qquad (r^2 = x^2 + y^2) \tag{1}$$

Η L είναι ίση με τη στροφορμή 2mαu της κυκλικής κίνησης επειδή η πρόσθετη ταχύτητα υ δε συνεισφέρει στη στροφορμή ως προς z. Για να βρούμε λοιπόν την L = 2mαu πρέπει να βρούμε την ταχύτητα u της



Σχήμα 1



Σχήμα 2

κυκλικής κίνησης $r = 2\alpha$. Για $r = 2\alpha$ είναι $z = \alpha$ οπότε $\varepsilon\varphi\varphi = dz/dr = r/2\alpha = 2\alpha/2\alpha = 1$ ή $\varphi = 45^0$. Στην κυκλική κίνηση, η κατακόρυφη συνιστώσα $R\sigma\upsilon\nu\varphi = R/\sqrt{2}$ της αντίδρασης εξισορροπεί το βάρος mg του Σ ενώ η οριζόντια συνιστώσα της $R\eta\mu\varphi = R/\sqrt{2}$ παίζει το ρόλο της κεντρομόλας δύναμης $mu^2/r = mu^2/2\alpha$. Άρα θα είναι $R/\sqrt{2} = mg$ και $R/\sqrt{2} = mu^2/2\alpha$. Επομένως $u = \sqrt{2\alpha g}$, οπότε η (1) γίνεται

$$L = mr^2\dot{\vartheta} = 2\alpha m\sqrt{2\alpha g} \tag{2}$$

Το ολοκλήρωμα της ενέργειας είναι

$$\frac{1}{2}\,m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \frac{1}{2}\,m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\,mr^2\dot{\vartheta}^2 + mgz = \sigma\tau\alpha\theta. \equiv E \tag{3}$$

όπου $\upsilon^2 = \dot{r}^2 + \dot{z}^2$ είναι η συνιστώσα της ταχύτητας του Σ πάνω στο μεσημβρινό επίπεδο z - r (βλέπε στο σχήμα 2). Λύνοντας την (2) ως προς $\dot{\vartheta}$ και αντικαθιστώντας στην (3) βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}\,m\upsilon^2 + \frac{4m\alpha^3 g}{r^2} + mgz = E \tag{4}$$

Αρχικά είναι $\upsilon = \sqrt{\alpha g}$, $z = \alpha$, $r = 2\alpha$, οπότε από την (4) προκύπτει ότι $E = 5mg\alpha/2$. Χρησιμοποιώντας και τη σχέση $r^2 = 4\alpha z$ η (4) γίνεται

$$\upsilon^2 = 5g\alpha - 2gz - 2\alpha^2 g/z \tag{5}$$

Κατά την κίνηση είναι $\upsilon^2 \geqslant 0$. Σύμφωνα λοιπόν με την (5), πρέπει να είναι

$$5g\alpha - 2gz - 2\alpha^2 g/z \geqslant 0 \qquad \text{ή} \qquad 2z^2 - 5\alpha z + 2\alpha^2 \leqslant 0 \tag{6}$$

Ο περιορισμός (6) ικανοποιείται όταν

$$z_1 \leqslant z(t) \leqslant z_2$$

όπου $z_1 = \alpha/2$, $z_2 = 2\alpha$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης στην (6), δηλ. $\upsilon^2 = 0$. Έτσι αποδείχθηκε αυτό που ζητούσε η άσκηση.

7) Υλικό σημείο Σ κινείται στο επίπεδο Oxy με την επίδραση της δύναμης $\mathbf{F} = (-2x + y)\mathbf{i} + (x - 2y)\mathbf{j}$. Να βρεθεί για ποιες τιμές της ενέργειας η κίνηση είναι περατωμένη.

Λύση

Επειδή είναι $\mathrm{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, η δύναμη $\mathbf{F}$ προέρχεται από δυναμικό $V(x,y)$, δηλ. είναι

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2x + y, \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = x - 2y \tag{1}$$

Για να βρούμε το V ολοκληρώνουμε ως προς x την πρώτη εξίσωση (1) και βρίσκουμε

$$V = -\int(-2x + y)dx = x^2 - xy + c_{(y)} \tag{2}$$

Παραγωγίζοντας την (2) ως προς y βρίσκουμε

$$\partial V/\partial y = -x + dc/dy \tag{3}$$

Αντικαθιστούμε την (3) στη δεύτερη εξίσωση (1) και βρίσκουμε $dc/dy = 2y$. Ολοκληρώνουμε τη σχέση αυτή και βρίσκουμε $c = y^2$. Επομένως η (2) γίνεται $V = x^2 - xy + y^2$.

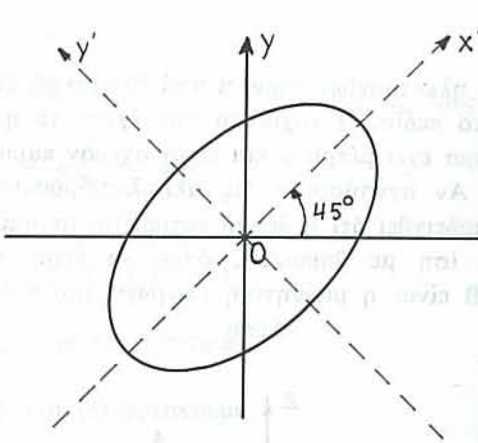
Το ολοκλήρωμα της ενέργειας είναι

$$E = T + V = \frac{1}{2}\, m\upsilon^2 + x^2 - xy + y^2 \tag{4}$$

Επειδή κατά την κίνηση είναι $T = (1/2)m\upsilon^2 \geqslant 0$, συμπεραίνουμε από την (4) ότι το υλικό σημείο μπορεί να βρεθεί μόνο σε εκείνα τα σημεία x, y του επιπέδου τα οποία ικανοποιούν τον περιορισμό

$$V(x,y) \leqslant E \qquad \text{ή} \qquad x^2 - xy + y^2 \leqslant E \tag{5}$$

Για να βρούμε τη γεωμετρική σημασία της (5), συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε νέους άξονες Ox′y′ που είναι στραμμένοι κατά 45^0 ως προς τους άξονες Oxy (βλέπε στο σχήμα).



Αν x′, y′ είναι οι συντεταγμένες του Σ ως προς τους νέους άξονες, θα ισχύουν οι σχέσεις

$$x = (x' - y')/\sqrt{2}, \qquad y = (x' + y')/\sqrt{2} \tag{6}$$

Επομένως η (5) γίνεται

$$(x')^2 + 3(y')^2 \leqslant 2E \tag{7}$$

Όταν η ενέργεια είναι θετική $(E > 0)$ η (7) ικανοποιείται στο εσωτερικό (και στα σύνορα) της έλλειψης

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{2E})^2} + \frac{(y')^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{3}}\right)^2} = 1 \tag{8}$$

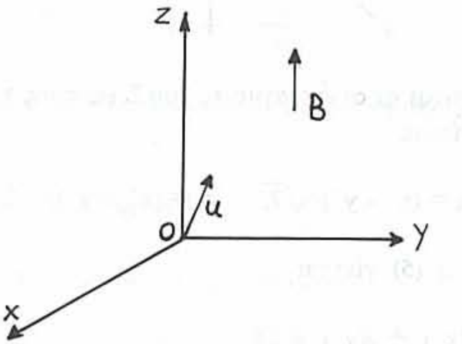
Η έλλειψη (8) είναι στραμμένη κατά 45^0 ως προς τους άξονες Oxy έχει μεγάλο ημιάξονα $\sqrt{2E}$ και μικρό ημιάξονα $\sqrt{2E/3}$ (βλέπε στο σχήμα).

Επειδή το Σ δεν μπορεί να βρεθεί έξω από την έλλειψη, όλες οι κινήσεις του παγιδεύονται μέσα της δηλ. είναι περατωμένες (για $E > 0$).

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που $E \leqslant 0$. Επειδή πρέπει να ισχύει η (7), η ενέργεια E δεν μπορεί να είναι αρνητική αφού το πρώτο μέλος της (7) είναι μη-αρνητικό. Σύμφωνα με την (4), η ενέργεια μηδενίζεται μόνο όταν $\upsilon = x = y = 0$. Τότε όμως μηδενίζεται και η δύναμη **F**. Άρα η τιμή $E = 0$ αντιστοιχεί στην ισορροπία του Σ στην αρχή O των αξόνων. Ώστε, σε όλες τις περιπτώσεις ($E \geqslant 0$) η κίνηση είναι περατωμένη.

8) Μια δέσμη ηλεκτρονίων περνάει από ένα μικρό άνοιγμα μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Η ταχύτητα που έχουν τα ηλεκτρόνια όταν βρεθούν στο άνοιγμα έχει μέτρο u και είναι σχεδόν παράλληλη προς το μαγνητικό πεδίο. Αν αγνοήσουμε τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα ηλεκτρόνια, να αποδειχθεί ότι η δέσμη εστιάζεται σε απόσταση (από το άνοιγμα) περίπου ίση με $2\pi mu/eB$, όπου $-e$ είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου και B είναι η μαγνητική επαγωγή του πεδίου.

Λύση



Διαλέγουμε τους άξονες Oxyz έτσι ώστε η αρχή O να βρίσκεται στο άνοιγμα και ο άξονας z να είναι παράλληλος προς το **B**. Η Δ.Ε της κίνησης κάθε ηλεκτρονίου είναι

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\boldsymbol{\upsilon}\mathrm{x}\mathbf{B} \tag{1}$$

Αλλά είναι

$$\boldsymbol{\upsilon} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{B} = B\mathbf{k}, \qquad \boldsymbol{\upsilon}\mathrm{x}\mathbf{B} = -B\dot{x}\mathbf{j} + B\dot{y}\mathbf{i}$$

Επομένως η (1) γίνεται

$$m(\ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k) = -eB\dot{y}i + eB\dot{x}j$$

ή

$$m\ddot{x} = -eB\dot{y}, \qquad \ddot{y} = eBx, \qquad \ddot{z} = 0 \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία από τις (2) και παίρνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες $t = 0$, $z = 0$, $\dot{z} = \dot{z}_0 \neq 0$, βρίσκουμε

$$z = \dot{z}_0 t \tag{3}$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη από τις (2) ως προς t βρίσκουμε

$$\ddot{\upsilon}_x = -\omega\dot{\upsilon}_y = -\omega\upsilon_x \tag{4}$$

όπου $\upsilon_x = \dot{x}$, $\upsilon_y = \dot{y}$, $\omega = eB/m$.

Η γενική λύση της (4) είναι

$$\upsilon_x = c_1\sigma\upsilon\nu\omega t + c_2\eta\mu\omega t \tag{5}$$

Από τις (2) και (5) βρίσκουμε

$$\upsilon_y = -\omega^{-1}\dot{\upsilon}_x = c_1\eta\mu\omega t - c_2\sigma\upsilon\nu\omega t \tag{6}$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες $t = 0$ $\upsilon_x = \dot{x}_0$, $\upsilon_y = \dot{y}_0$ στις (5) και (6) βρίσκουμε $c_1 = \dot{x}_0$, $c_2 = -\dot{y}_0$, οπότε οι (5) και (6) γίνονται

$$\begin{aligned} \upsilon_x &= \dot{x} = \dot{x}_0\sigma\upsilon\nu\omega t - \dot{y}_0\eta\mu\omega t \\ \upsilon_y &= \dot{y} = \dot{x}_0\eta\mu\omega t + \dot{y}_0\sigma\upsilon\nu\omega t \end{aligned} \tag{7}$$

Ολοκληρώνοντας τις (7) και παίρνοντας υπόψη ότι για $t = 0$ είναι $x = y = 0$ βρίσκουμε

$$x = \omega^{-1}[\dot{x}_0\eta\mu\omega t - \dot{y}_0(1 - \sigma\upsilon\nu\omega t)]$$

$$y = \omega^{-1}[\dot{y}_0\eta\mu\omega t + \dot{x}_0(1 - \sigma\upsilon\nu\omega t)]$$

Η απόσταση r του ηλεκτρονίου από τον άξονα z είναι

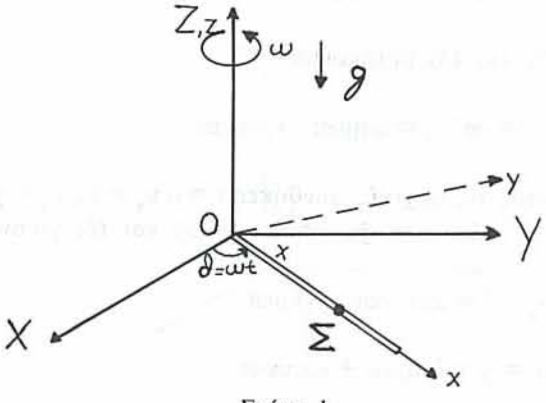
$$r^2 = x^2 + y^2 = 2\omega^{-2}(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)(1 - \sigma\upsilon\nu\omega t)$$

Η δέσμη των ηλεκτρονίων εστιάζεται όταν η απόσταση r μηδενιστεί, δηλ. όταν συνωt = 1. Αυτό συμβαίνει για πρώτη φορά όταν $t = 2\pi/\omega$. Τη στιγμή εκείνη είναι $z = \dot{z}_0 t = 2\pi z_0/\omega$. Το γεγονός ότι η αρχική ταχύτητα $\mathbf{u} = \dot{x}_0\mathbf{i} + \dot{y}_0\mathbf{j} + \dot{z}_0\mathbf{k}$ είναι σχεδόν παράλληλη προς τον άξονα z σημαίνει ότι οι $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ είναι πολύ μικρότερες από την $\dot{z}_0$, οπότε θα είναι $u \simeq \dot{z}_0$. Άρα η δέσμη εστιάζεται σε απόσταση $2\pi\dot{z}_0/\omega \simeq 2\pi mu/eB$.

δ) Σχετική κίνηση

1) Μικρή σφαίρα Σ είναι υποχρεωμένη να κινείται μέσα σε λείο οριζόντιο σωλήνα ο οποίος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από ένα σημείο Ο του σωλήνα. Να βρεθεί η κίνηση του Σ σχετικά με το σωλήνα και η αντίδραση του σωλήνα. Διατηρείται η ενέργεια του Σ; Υπάρχουν ολοκληρώματα της κίνησης; Επίσης, να βρεθεί η σχετική κίνηση του Σ όταν ο σωλήνας περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα.

Λύση



Σχήμα 1

Στο σχήμα 1 φαίνονται οι αδρανειακοί άξονες OXYZ και οι περιστρεφόμενοι άξονες Oxyz. Η Δ.Ε της σχετικής κίνησης του Σ είναι

$$m\gamma_{\sigma\chi} = \mathbf{B} + \mathbf{R} + m\omega^2 \cdot \overrightarrow{O\Sigma} - 2m\omega\chi\upsilon_{\sigma\chi} \tag{1}$$

όπου η αντίδραση **R** του σωλήνα είναι κάθετη σ' αυτόν (επειδή δεν υπάρχει τριβή). Αν **i, j, k** είναι οι διανυσματικές μονάδες των αξόνων Oxyz, τότε θα είναι

$$\overrightarrow{O\Sigma} = x\mathbf{i}, \qquad \upsilon_{\sigma\chi} = \dot{x}\mathbf{i}, \qquad \gamma_{\sigma\chi} = \ddot{x}\mathbf{i}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k},$$

$$\omega x \upsilon_{\sigma\chi} = \omega\dot{x}\mathbf{j}, \qquad \mathbf{B} = -mg\mathbf{k}, \qquad \mathbf{R} = R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην (1) και παίρνοντας τις προβολές κατά τις διευθύνσεις **i**, **j**, **k** βρίσκουμε

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x, \qquad m\ddot{y} = 0 = R_y - 2m\omega\dot{x}, \qquad m\ddot{z} = 0 = -mg + R_z \tag{2}$$

Η γενική λύση της πρώτης Δ.Ε (2) είναι

$$x = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t} \rightarrow \dot{x} = \omega(c_1 e^{\omega t} - c_2 e^{-\omega t}) \tag{3}$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 υπολογίζονται με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών, π.χ. αν για $t = 0$ είναι $x = x_0$ και $\dot{x} = \dot{x}_0$ οι (3) δίνουν (για $t = 0$) $x_0 = c_1 + c_2$ και $\dot{x}_0 = \omega(c_1 - c_2)$. Άρα θα είναι

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right), \qquad c_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις (2) και από την (3) προκύπτει ότι η αντίδραση του σωλήνα είναι ίση με

$$R_y = 2m\omega\dot{x} = 2m\omega^2(c_1 e^{\omega t} - c_2 e^{-\omega t}), \qquad R_z = mg \tag{4}$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του Σ είναι σταθερή και γι' αυτό την παραλείπουμε. Επομένως η συνολική ενέργεια του Σ είναι ίση με

$$E = m\upsilon^2/2 = m(\dot{x}^2 + x^2\dot{\vartheta}^2)/2 = m(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)/2 \tag{5}$$

όπου η ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon} = \dot{x}\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$ αναφέρεται στο αδρανειακό σύστημα. Παραγωγίζοντας την (5) ως προς t και χρησιμοποιώντας τις (4) βρίσκουμε

$$dE/dt = m\dot{x}(\ddot{x} + \omega^2 x) = 2m\omega^2\dot{x}x = R_y\omega x = \mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\upsilon} \neq 0$$

όπου η ποσότητα $\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\upsilon}$ είναι η ισχύς της αντίδρασης, δηλ. ο ρυθμός με τον οποίο η αντίδραση **R** παράγει έργο καθώς το Σ κινείται ως προς το αδρανειακό σύστημα. Επομένως η ενέργεια του Σ δε διατηρείται σταθερή. Η μεταβολή της οφείλεται στο έργο που παράγει η αντίδραση του σωλήνα.

Πολ/ζοντας τα δύο μέλη της πρώτης Δ.Ε (2) επί $\dot{x}$ βρίσκουμε

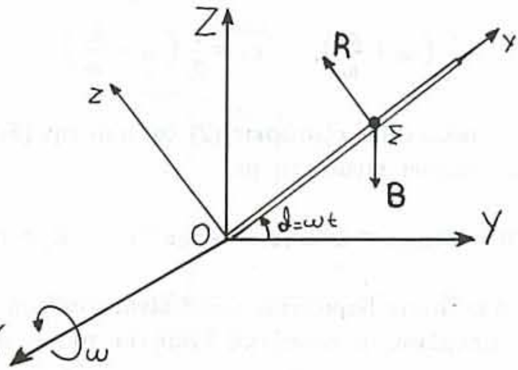
$$m\dot{x}\ddot{x} - m\omega^2 x\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - m\omega^2 x^2\right) = 0$$

'Αρα

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - m\omega^2 x^2 = \sigma\tau\alpha\theta. \equiv E' \tag{6}$$

'Ωστε η ποσότητα E΄ είναι ολοκλήρωμα της κίνησης. Το ολοκλήρωμα αυτό θα μπορούσαμε να το θεωρήσουμε ως ολοκλήρωμα της ενέργειας στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς Oxyz. Ως προς το Oxyz, η Σ έχει κινητική ενέργεια ίση με $m\dot{x}^2/2$ και δυναμική ενέργεια ίση με $V' = -m\omega^2 x$. Η δύναμη που οφείλεται στην V΄ είναι ίση με $-dV'/dx = m\omega^2 x$, δηλ. είναι η φυγόκεντρη δύναμη που ενεργεί στο Σ ως προς το σύστημα Oxyz. Γι' αυτό η V΄ ονομάζεται φυγόκεντρη δυναμική ενέργεια.

β)



Σχήμα 2

Στην περίπτωση που ο σωλήνας περιστρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα x είναι

$$\overrightarrow{O\Sigma} = y\mathbf{j}, \quad \upsilon_{\sigma\chi} = \dot{y}\mathbf{j}, \quad \gamma_{\sigma\chi} = \ddot{y}\mathbf{j}, \quad \omega = \omega\mathbf{i},$$

$$\omega x \upsilon_{\sigma\chi} = \omega\dot{y}\mathbf{k}, \quad B = -mg\eta\mu\vartheta\mathbf{j} - mg\sigma\upsilon\nu\vartheta\mathbf{k}, \quad R = R_x\mathbf{i} + R_z\mathbf{k}$$

Επομένως από την (1) προκύπτει ότι $m\ddot{x} = 0 = R_x$ και

$$m\ddot{y} = m\omega^2 y - mg\eta\mu\omega t \tag{7}$$

$$m\ddot{z} = 0 = -mg\sigma\upsilon\nu\omega t + R_z - 2m\omega\dot{y} \tag{8}$$

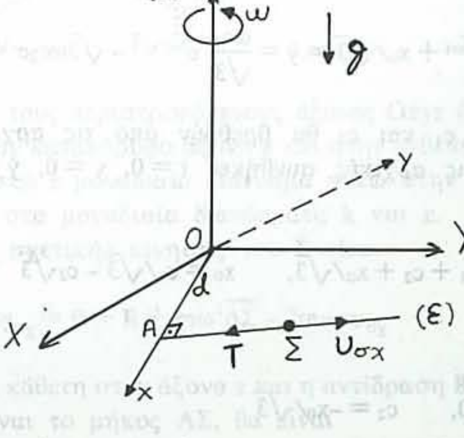
Η γενική λύση της γραμμικής Δ.Ε (7) είναι

$$y = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\,\eta\mu\omega t \tag{9}$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες. Αντικαθιστώντας την (9) στην (8) βρίσκουμε την αντίδραση R_z.

2) Υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω στην ευθεία $z = 0$, $x = d$ η οποία είναι στερεά δεμένη με το σύστημα αναφοράς Oxyz. Το Oxyz περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονα z. Αρχικά το Σ βρίσκεται στο σημείο Α ($x = x_0 > 0$) του άξονα x και έχει ταχύτητα ίση με $\omega x_0 \mathbf{j}$ ως προς το Oxyz. Αν ο συντελεστής τριβής είναι $f = 1/\sqrt{3}$ να αποδειχθεί ότι το Σ τείνει (για $t \to \infty$) να ηρεμήσει πάνω στην ευθεία σε απόσταση $x_0/\sqrt{3}$ από το Α.

Λύση



Στο σχήμα φαίνονται οι αδρανειακοί άξονες OXYZ, οι περιστρεφόμενοι άξονες Oxyz και η ευθεία (ε). Η Δ.Ε της σχετικής κίνησης του Σ είναι

$$m\gamma_{\sigma\chi} = \mathbf{B} + \mathbf{R} + m\omega^2\overrightarrow{O\Sigma} - 2m\omega\chi\upsilon_{\sigma\chi} \tag{1}$$

Αν **i**, **j**, **k** είναι οι διανυσματικές μονάδες των αξόνων Oxyz, θα είναι

$$\overrightarrow{O\Sigma} = x_0\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \qquad \upsilon_{\sigma\chi} = \dot{y}\mathbf{j}, \qquad \gamma_{\sigma\chi} = \ddot{y}\mathbf{j}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k},$$

$$\omega x \upsilon_{\sigma\chi} = -\omega\dot{y}\mathbf{i}, \qquad \mathbf{B} = -mg\mathbf{k}.$$

Επίσης, η αντίδραση $\mathbf{R}$ της ευθείας έχει μια συνιστώσα R_x κάθετη στην ευθεία και μια παράλληλη προς αυτήν. Η παράλληλη συνιστώσα είναι η τριβή $\mathbf{T} = -f|R_x|\mathbf{j}$ και έχει φορά αντίθετη προς τη σχετική ταχύτητα $\upsilon_{\sigma\chi}$. Άρα είναι $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} - f|R_x|\mathbf{j}$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (1) και παίρνοντας τις προβολές κατά τις διευθύνσεις $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$ βρίσκουμε

$$m\ddot{x} = 0 = R_x + m\omega^2 x_0 + 2m\omega\dot{y} \tag{2}$$

$$m\ddot{y} = -|R_x|/\sqrt{3} + m\omega^2 y \tag{3}$$

Επειδή $\dot{y} > 0$, από την (2) προκύπτει ότι $R_x < 0$, οπότε $R_x = -|R_x|$. Απαλοίφοντας λοιπόν την $|R_x|$ ανάμεσα στις (2) και (3) βρίσκουμε

$$\sqrt{3}(\ddot{y} - \omega^2 y) + 2\omega\dot{y} + \omega^2 x_0 = 0 \tag{4}$$

Η (4) είναι η Δ.Ε της σχετικής κίνησης του Σ και είναι γραμμική. Η γενική λύση της είναι

$$y = c_1 e^{\omega t/\sqrt{3}} + c_2 e^{-\sqrt{3}\omega t} + x_0/\sqrt{3} \Rightarrow \dot{y} = \frac{\omega c_1}{\sqrt{3}} e^{\omega t/\sqrt{3}} - \sqrt{3}\omega c_2 e^{-\sqrt{3}\omega t} \tag{5}$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες. Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες $t = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = \omega x_0$ στις (5) βρίσκουμε

$$0 = c_1 + c_2 + x_0/\sqrt{3}, \qquad x_0 = c_1/\sqrt{3} - c_2\sqrt{3}$$

Άρα

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = -x_0/\sqrt{3}$$

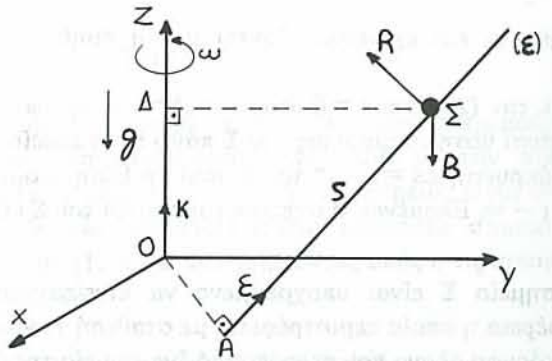
οπότε οι (5) γίνονται

$$y = x_0(1 - e^{-\sqrt{3}\omega t})/\sqrt{3}, \qquad \dot{y} = \omega x_0 e^{-\sqrt{3}\omega t} \tag{6}$$

Παρατηρούμε ότι η σχετική ταχύτητα $\dot{y}$ του Σ διατηρεί πάντα το ίδιο πρόσημο. Αν δεν συνέβαινε αυτό, τότε κάθε φορά που θα άλλαζε το πρόσημο της $\dot{y}$ έπρεπε να αλλάξει και το πρόσημο της τριβής οπότε θα άλλαζε και η Δ.Ε της κίνησης. Στην περίπτωσή μας η Δ.Ε της κίνησης ισχύει λοιπόν για όλα τα t. Από την (6) προκύπτει ότι για $t \to \infty$, $y \to x_0/\sqrt{3}$ και $\dot{y} \to 0$, δηλ. αυτό που ζητούσαμε να αποδείξουμε.

3) Υλικό σημείο Σ κινείται με την επίδραση του βάρους του πάνω σε λεία ευθεία που συνδέεται στερεά με έναν κατακόρυφο άξονα. Η ευθεία περιστρέφεται γύρω από τον άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η κίνηση του Σ πάνω στην ευθεία.

Λύση



Διαλέγουμε τους περιστρεφόμενους άξονες Oxyz έτσι ώστε η OA να είναι κάθετη στον κατακόρυφο άξονα z και στην ευθεία (ε), όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω ε μοναδιαίο διάνυσμα πάνω στην ευθεία (ε) και φ η γωνία ανάμεσα στα μοναδιαία διανύσματα **k** και ε.

Η Δ.Ε της σχετικής κίνησης του Σ είναι

$$m\gamma_{\sigma\chi} = \mathbf{B} + \mathbf{R} + m\omega^2\overrightarrow{\Delta\Sigma} - 2m\omega x \upsilon_{\sigma\chi} \qquad (1)$$

όπου η $\overrightarrow{\Delta\Sigma}$ είναι κάθετη στον άξονα z και η αντίδραση **R** είναι κάθετη στην ευθεία. Αν s είναι το μήκος ΑΣ, θα είναι

$$\upsilon_{\sigma\chi} = \dot{s}\varepsilon, \qquad \gamma_{\sigma\chi} = \ddot{s}\varepsilon, \qquad \omega = \omega\mathbf{k}, \qquad \mathbf{B} = -mg\mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{\Delta\Sigma} = \overrightarrow{\Delta O} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Sigma}, \qquad \overrightarrow{A\Sigma} = s\varepsilon, \qquad \varepsilon \cdot \mathbf{k} = \sigma\upsilon\nu\varphi,$$

$$\overrightarrow{\Delta O} = -5\sigma\upsilon\nu\varphi\mathbf{k}, \qquad \mathbf{R} \cdot \varepsilon = 0,$$

$$\overrightarrow{\Delta\Sigma} \cdot \varepsilon = \overrightarrow{\Delta O} \cdot \varepsilon + \overrightarrow{A\Sigma} \cdot \varepsilon = -s\sigma\upsilon\nu^2\varphi + s = s\eta\mu^2\varphi$$

Πολ/ζοντας την (1) επί ε και παίρνοντας υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε

$$\ddot{s} = \omega^2\eta\mu^2\varphi \cdot s - g\sigma\upsilon\nu\varphi \tag{2}$$

Η γενική λύση της γραμμικής Δ.Ε (2) είναι

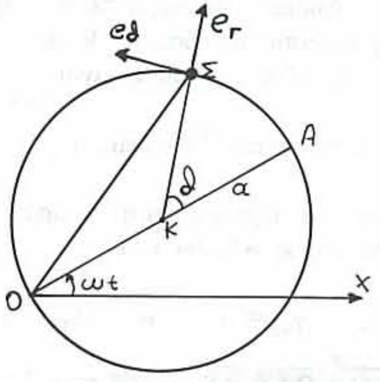
$$s = c_1 e^{\omega t\eta\mu\varphi} + c_2 e^{-\omega t\eta\mu\varphi} + \frac{g\sigma\upsilon\nu\varphi}{\omega^2\eta\mu^2\varphi} \tag{3}$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 υπολογίζονται με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών.

Σύμφωνα με την (2) είναι $\ddot{s} = 0$ όταν $s = s^* = g\sigma\upsilon\nu\varphi/(\omega^2\eta\mu^2\varphi)$. Επομένως η θέση s^* είναι θέση ισορροπίας του Σ πάνω στην ευθεία. Σύμφωνα με την (3) η απομάκρυνση $\Delta s = s - s^*$ του Σ από τη θέση ισορροπίας τείνει στο άπειρο για $t \to \infty$. Επομένως η σχετική ισορροπία του Σ είναι ασταθής.

4) Υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω σε λεία οριζόντια περιφέρεια η οποία περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από ένα σημείο της Ο. Να βρεθεί η κίνηση του Σ πάνω στην περιφέρεια και η αντίδραση της περιφέρειας.

Λύση



Η Δ.Ε της σχετικής κίνησης του Σ είναι

$$m\gamma_{\sigma\chi} = \mathbf{B} + \mathbf{R} - m\gamma_k + m\omega^2\overrightarrow{K\Sigma} - 2m\omega\chi\upsilon_{\sigma\chi} \tag{1}$$

Η αντίδραση **R** είναι κάθετη στην περιφέρεια και γι' αυτό γράφεται με τη μορφή $\mathbf{R} = R_r\mathbf{e}_r + R_z\mathbf{k}$. Αν α είναι η ακτίνα της περιφέρειας, θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{K\Sigma} = \alpha\mathbf{e}_r, \qquad \boldsymbol{\upsilon}_{\sigma\chi} = \alpha\dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta, \qquad \boldsymbol{\gamma}_{\sigma\chi} = -\alpha\dot{\vartheta}^2\mathbf{e}_r + \alpha\ddot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta,$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega\mathbf{k}, \qquad \boldsymbol{\omega}\mathrm{x}\boldsymbol{\upsilon}_{\sigma\chi} = -\alpha\omega\dot{\vartheta}\mathbf{e}_r, \qquad \overrightarrow{OK} = \alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta\mathbf{e}_r - \alpha\eta\mu\vartheta\mathbf{e}_\vartheta,$$

$$\boldsymbol{\gamma}_k = -\omega^2\overrightarrow{OK}, \qquad \mathbf{B} = -mg\mathbf{k}$$

Πολ/ζοντας την (1) επί $\mathbf{e}_\vartheta$ και παίρνοντας υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε τελικά

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2\eta\mu\vartheta = 0 \tag{2}$$

Η Δ.Ε (3) είναι ίδια με τη Δ.Ε του απλού εκκρεμούς. Άρα η κίνηση του Σ πάνω στην περιφέρεια είναι ίδια με την κίνηση του απλού εκκρεμούς. Το σημείο Α ($\vartheta = 0$) της περιφέρειας είναι σημείο ισορροπίας (επειδή $\ddot{\vartheta} = 0$) και αντιστοιχεί στο κατώτατο σημείο του εκκρεμούς. Πολ/ζοντας την (1) επί $\mathbf{e}_r$ και παίρνοντας υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε τελικά

$$R_r = -m\alpha[\omega^2\sigma\upsilon\nu\vartheta + (\omega + \dot{\vartheta})^2] \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι η R_r εξαρτιέται και από το πρόσημο του $\dot{\vartheta}$, δηλ. τη φορά της σχετικής κίνησης. Για να βρούμε το $\dot{\vartheta}$ που χρειάζεται στην (3), πολ/ζουμε την (2) επί $\dot{\vartheta}$ και ολοκληρώνουμε. Προκύπτει ότι

$$\dot{\vartheta}^2 = 2\omega^2\sigma\upsilon\nu\vartheta + c \tag{4}$$

όπου η σταθερή c υπολογίζεται με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών.

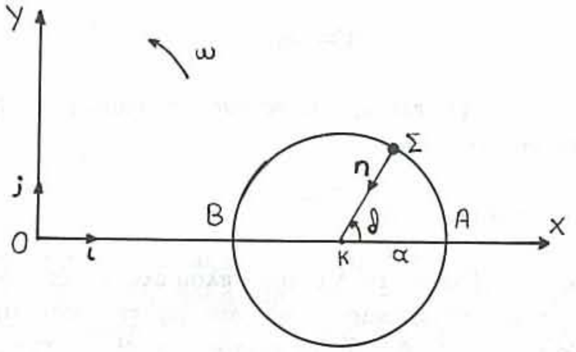
Πολ/ζοντας την (1) επί **k** και παίρνοντας υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε

$$R_z = mg \tag{5}$$

Οι σχέσεις (3), (4), (5) δίνουν την αντίδραση της περιφέρειας ως συνάρτηση του ϑ.

5) Υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω σε λεία περιφέρεια με ακτίνα α. Η περιφέρεια περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδό της σε απόσταση $b > \alpha$ από το κέντρο της k. Να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας του Σ πάνω στην περιφέρεια καθώς και η ευστάθειά τους.

Λύση



Η Δ.Ε της σχετικής κίνησης του Σ είναι

$$m\gamma_{\sigma\chi} = \mathbf{R} + m\omega^2\overrightarrow{O\Sigma} - 2m\omega x \upsilon_{\sigma\chi} \tag{1}$$

Η αντίδραση **R** είναι κάθετη στην περιφέρεια και γι' αυτό γράφεται με τη μορφή $\mathbf{R} = R\mathbf{n}$ όπου $\mathbf{n} = -(\sigma\upsilon\nu\vartheta\mathbf{i} + \eta\mu\vartheta\mathbf{j})$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην περιφέρεια (όπως φαίνεται στο σχήμα) και **i**, **j**, **k** είναι οι διανυσματικές μονάδες των περιστρεφομένων αξόνων Oxyz. Επίσης είναι

$$\overrightarrow{O\Sigma} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \qquad \upsilon_{\sigma\chi} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}, \qquad \gamma_{\sigma\chi} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j},$$

$$\omega = \omega\mathbf{k}, \qquad \omega x \upsilon_{\sigma\chi} = \omega\dot{x}\mathbf{j} - \omega\dot{y}\mathbf{i}$$

Προβάλλοντας την (1) κατά τις διευθύνσεις των **i** και **j** και παίρνοντας υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε

$$m\ddot{x} = -R\sigma\upsilon\nu\vartheta + m\omega^2 x + 2m\omega\dot{y} \tag{2}$$

$$m\ddot{y} = -R\eta\mu\vartheta + m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x} \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας στις (2) και (3) τις σχέσεις $x = b + \alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y = \alpha\eta\mu\vartheta$ και απαλοίφοντας την αντίδραση R βρίσκουμε

$$\ddot{\vartheta} + 4\omega\dot{\vartheta}\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta + b\omega^2\alpha^{-1}\eta\mu\vartheta = 0 \tag{4}$$

Η (4) είναι η Δ.Ε της σχετικής κίνησης του Σ. Για να βρούμε τα σημεία σχετικής ισορροπίας βάζουμε $\dot{\vartheta} = \ddot{\vartheta} = 0$ στην (4) και προκύπτει $\eta\mu\vartheta = 0$. Επομένως υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας, το $\vartheta = 0$ (σημείο Α) και το $\vartheta = \pi$ (σημείο Β).

Για να βρούμε την ευστάθειά τους θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των διαταραχών:

α) **Σημείο Α ($\vartheta = 0$).** Η διαταραγμένη κίνηση είναι $\vartheta(t) = 0 + \delta\vartheta(t)$. Άρα $\dot{\vartheta} = \delta\dot{\vartheta}$, $\ddot{\vartheta} = \delta\ddot{\vartheta}$, $\eta\mu\vartheta = \eta\mu\delta\vartheta \simeq \delta\vartheta$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \sigma\upsilon\nu\delta\vartheta \simeq 1$. Επομένως η εξίσωση (4) γίνεται (με προσέγγιση όρων πρώτης τάξης ως προς τις μικρές διαταραχές $\delta\vartheta$ και $\delta\dot{\vartheta}$)

$$\delta\ddot{\vartheta} + (b\omega^2/\alpha)\delta\vartheta = 0$$

Άρα η διαταραγμένη κίνηση $\delta\vartheta(t)$ είναι απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\Omega = \omega\sqrt{b/\alpha}$ και το σημείο ισορροπίας Α είναι ευσταθές.

β) **Σημείο Β ($\vartheta = \pi$).** Η διαταραγμένη κίνηση είναι $\vartheta(t) = \pi + \delta\vartheta(t)$. Με τον ίδιο τρόπο όπως και πριν, καταλήγουμε στην εξίσωση

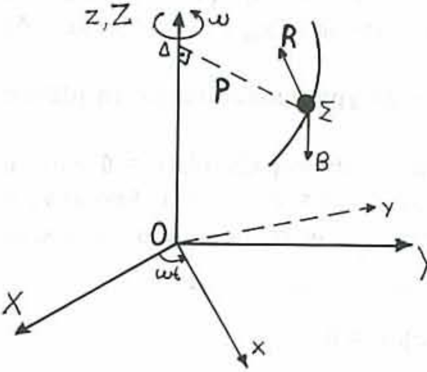
$$\delta\ddot{\vartheta} - (b\omega^2/\alpha)\delta\vartheta = 0$$

Άρα η διαταραχή $\delta\vartheta(t)$ δεν είναι περατωμένη και γιαυτό το σημείο ισορροπίας Β είναι ασταθές.

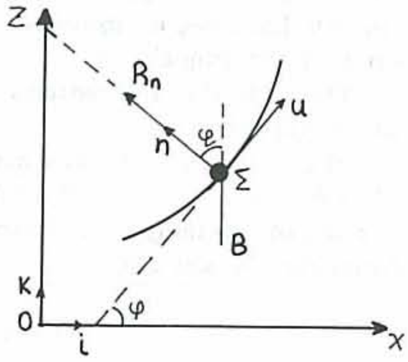
6) Μια λεία καμπύλη βρίσκεται στο κατακόρυφο επίπεδο Oxz το οποίο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z. Ένα υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται με την επίδραση του βάρους του πάνω στην καμπύλη. Να αποδειχθεί ότι η ποσότητα $u^2 - \omega^2x^2 + 2gz$, όπου u είναι η ταχύτητα του Σ σχετικά με το σύστημα Oxyz, είναι ολοκλήρωμα της κίνησης. Τι σχέση έχει το ολοκλήρωμα αυτό με την ενέργεια του Σ; Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του Σ πάνω στην καμπύλη καθώς και η ευστάθειά τους. Ποια μορφή πρέπει να έχει η καμπύλη ώστε κάθε σημείο της να είναι σημείο ισορροπίας; Στην περίπτωση αυτή πόση είναι η αντίδραση της καμπύλης; Υποθέτουμε τώρα ότι η καμπύλη έχει εξίσωση $x^2 = 4\alpha z$, ότι $\omega = \sqrt{g/\alpha}$, και

ότι το Σ εκτοξεύεται από το σημείο $z=\alpha$ προς το σημείο $z=0$ της παραβολής $x^2=\alpha z$ με ταχύτητα $u=2\sqrt{\alpha g}$. Να αποδειχθεί ότι το Σ θα φτάσει στο $z=0$ μετά από χρόνο $\sqrt{2\alpha/g}$ έχοντας ταχύτητα ίση με $\sqrt{2\alpha g}$.

Λύση



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Η Δ.Ε της σχετικής κίνησης του Σ είναι

$$m\gamma_{\sigma\chi.}=\mathbf{B}+\mathbf{R}+m\omega^2\overrightarrow{\Delta\Sigma}-2m\omega x\upsilon_{\sigma\chi.} \tag{1}$$

όπου η αντίδραση **R** είναι κάθετη στην καμπύλη. Αν **i**, **j**, **k** είναι οι διανυσματικές μονάδες των περιστρεφομένων αξόνων Oxyz και $\mathbf{n}=\sigma\upsilon\nu\varphi\mathbf{k}-\eta\mu\varphi\mathbf{i}$ είναι διανυσματική μονάδα κάθετη στην καμπύλη (όπως φαίνεται στο σχήμα 2) τότε θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\Delta\Sigma}=x\mathbf{i},\quad \upsilon_{\sigma\chi.}\equiv\mathbf{u}=\dot{x}\mathbf{i}+\dot{z}\mathbf{k},\quad \gamma_{\sigma\chi.}=\ddot{x}\mathbf{i}+\ddot{z}\mathbf{j},\quad \boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{k}\\ &\omega x\upsilon_{\sigma\chi.}=\omega\dot{x}\mathbf{j},\quad \mathbf{B}=-mg\mathbf{k},\quad \mathbf{R}=R_n\mathbf{n}+R_y\mathbf{j}\end{aligned} \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (1) και παίρνοντας τις προβολές κατά τις διευθύνσεις **i**, **j**, **k** βρίσκουμε

$$m\ddot{x}=-R_n\eta\mu\varphi+m\omega^2x \tag{3}$$

$$m\ddot{y}=0=R_y-2m\omega\dot{x} \tag{4}$$

$$m\ddot{z}=-mg+R_n\sigma\upsilon\nu\varphi \tag{5}$$

Απαλοίφοντας την R_n από τις (3) και (5) βρίσκουμε

$$\ddot{x} - \omega^2 x + (\ddot{z} + g)\varepsilon\varphi\varphi = 0 \tag{6}$$

Επειδή εφφ = dz/dx = z/x, η (6) γίνεται

$$\dot{x}\ddot{x} - \omega^2 x\dot{x} + (\dot{z}\ddot{z} + g\dot{z}) = 0 \tag{7}$$

Αλλά είναι

$$\dot{x}\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right), \qquad x\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

Άρα η (7) γίνεται

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + gz\right] = 0$$

Επομένως

$$u^2 - \omega^2 x^2 + 2gz = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{8}$$

Για να βρούμε τη σχέση του ολοκληρώματος (8) με την ενέργεια, γράφουμε την (8) με τη μορφή

$$\frac{1}{2} mu^2 + mgz - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \sigma\tau\alpha\theta. \equiv E' \tag{8$'$}$$

Η ενέργεια του Σ είναι ίση με

$$E = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + mgz = \frac{1}{2} m(u^2 + \omega^2 x^2) + mgz \tag{9}$$

όπου υ είναι η ταχύτητα του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα OXYZ. Από τις (8)΄ και (9) βρίσκουμε

$$E = E' + m\omega^2 x^2 \tag{10}$$

Αυτή είναι η σχέση ανάμεσα στο ολοκλήρωμα E΄ και την ενέργεια E. Η ενέργεια του Σ δε διατηρείται σταθερή. Πράγματι, παραγωγίζοντας την (10) και χρησιμοποιώντας την (4) βρίσκουμε

$$dE/dt = (2m\omega\dot{x})\omega x = R_y \upsilon_y = \mathbf{R} \cdot \upsilon \neq 0$$

Παρατηρούμε ότι η μεταβλητότητα της ενέργειας οφείλεται στο ότι η αντίδραση της καμπύλης παράγει έργο καθώς το Σ κινείται στο αδρανειακό σύστημα.

Θα βρούμε τώρα τα σημεία ισορροπίας. Αν $x = x(s)$, $z = z(s)$ είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης, όπου το μήκος τόξου s μετριέται από τυχαίο σημείο της καμπύλης και έτσι ώστε τα s, φ να αυξάνουν ταυτόχρονα, θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\dot{x} = \dot{s}\,\text{συν}\varphi, \quad \dot{z} = \dot{s}\,\text{ημ}\varphi, \quad \dot{\varphi} = \dot{s}/\rho, \quad d\varphi = ds/\rho \tag{11}$$

όπου ρ είναι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο Σ.

Από τις (11) βρίσκουμε

$$\ddot{x} = \ddot{s}\,\text{συν}\varphi - s^2\rho^{-1}\text{ημ}\varphi, \qquad \ddot{z} = \ddot{s}\,\text{ημ}\varphi + s^2\rho^{-1}\text{συν}\varphi \tag{12}$$

Αντικαθιστώντας τις (12) στην (6) βρίσκουμε

$$\ddot{s} - \omega^2 x\,\text{συν}\varphi + g\,\text{ημ}\varphi = 0 \tag{13}$$

Στα σημεία ισορροπίας είναι $\ddot{s} = 0$. Σύμφωνα λοιπόν με την (13) οι συντεταγμένες των σημείων ισορροπίας ικανοποιούν την εξίσωση

$$-\omega^2 x\,\text{συν}\varphi + g\,\text{ημ}\varphi = 0 \quad \text{ή} \quad x = g\,\text{εφ}\varphi/\omega^2 \tag{14}$$

Την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας θα τη βρούμε με τη μέθοδο των διαταραχών. Θεωρούμε τη διαταραγμένη κίνηση

$$s(t) = s_0 + \delta s(t), \quad x(t) = x_0 + \delta x(t), \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \delta\varphi(t) \tag{15}$$

όπου τα s_0, x_0, φ_0 αναφέρονται στην ισορροπία. Αντικαθιστώντας τις (15) στην (13) βρίσκουμε

$$\delta\ddot{s} - \omega^2(x + \delta x)\text{συν}(\varphi + \delta\varphi) + g\,\text{ημ}(\varphi + \delta\varphi) = 0 \tag{16}$$

Θεωρώντας τις διαταραχές δs, δx, δφ ως αρκετά μικρές, μπορούμε να κρατήσουμε μόνο τους όρους πρώτης τάξης ως προς δx, δφ, οπότε η (16) γίνεται (σε πρώτη προσέγγιση)

$$\delta\ddot{s} - \omega^2\delta x\,\text{συν}\varphi_0 + \delta\varphi(\omega^2 x_0\text{ημ}\varphi_0 + g\,\text{συν}\varphi_0) = 0 \tag{17}$$

Σύμφωνα με τις (11) και (14) είναι

$$\delta\varphi = \delta s/\rho_0, \quad \delta x = \delta s\,\sigma\upsilon\nu\varphi_0, \quad g\,\sigma\upsilon\nu\varphi_0 = \omega^2 x_0 \eta\mu\varphi_0$$

Άρα η (17) γίνεται

$$\ddot{\delta s} + \lambda\delta s = 0$$

όπου

$$\lambda = \omega^2 \left[\frac{x_0}{\rho_0 \eta\mu\varphi_0} - \sigma\upsilon\nu^2\varphi_0\right]$$

Επομένως όταν είναι $\lambda > 0$ ή ισοδύναμα

$$g/\omega^2 > \rho_0 \sigma\upsilon\nu^3\varphi_0 \tag{18}$$

η ισορροπία είναι ευσταθής ενώ όταν είναι $\lambda < 0$ η ισορροπία είναι ασταθής.

Από τις σχέσεις $\varepsilon\varphi\varphi = dz/dx$ και $\varepsilon\varphi\varphi = \omega^2 x/g$ προκύπτει ότι στην περίπτωση ισορροπίας ισχύει η σχέση

$$dz/dx = \omega^2 x/g \quad \text{ή} \quad dz = \omega^2 g^{-1} x dx$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή βρίσκουμε

$$z = \left(\frac{\omega^2}{2g}\right)x^2 + c \tag{19}$$

Επομένως η καμπύλη που κάθε σημείο της είναι σημείο ισορροπίας είναι η παραβολή (19). Όταν το Σ ισορροπεί σε τυχαίο σημείο της παραβολής (19) είναι $\ddot{x} = \ddot{z} = 0$ και οι εξισώσεις (4), (5) δίνουν

$$R_y = 0, \qquad R_n = mg/\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Όμως είναι

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = 1/\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\varphi} = 1/\sqrt{1 + \left(\frac{\omega^2 x}{g}\right)^2}$$

Άρα

$$R_n = mg\sqrt{1 + \frac{\omega^4 x^2}{g^2}}$$

Έτσι βρέθηκε η αντίδραση στην περίπτωση της παραβολής (19).

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση της παραβολής $x^2 = 4\alpha z$. Για $\omega = \sqrt{g/\alpha}$ η (8) γίνεται

$$u^2 - g\alpha^{-1}x^2 + 2gz = \sigma\tau\alpha\theta. \equiv \mu \tag{20}$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες $z = \alpha$, $x = 2\alpha$, $u^2 = 4\alpha g$ στην (20) βρίσκουμε ότι η σταθερή μ είναι ίση με $2g\alpha$ οπότε η (20) γίνεται

$$u^2 - g\alpha^{-1}x^2 + 2gz = 2g\alpha \tag{21}$$

Αντικαθιστώντας τις «τελικές» συνθήκες $x = z = 0$ στην (21) βρίσκουμε ότι η ταχύτητα u του Σ στο σημείο $x = z = 0$ είναι ίση με $\sqrt{2g\alpha}$. Αντικαθιστώντας στην (21) τις γνωστές σχέσεις

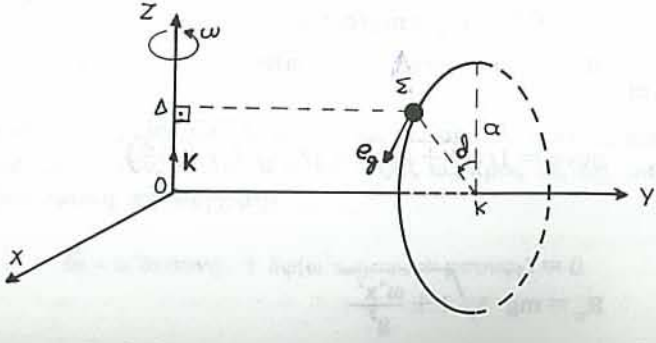
$$x^2 = 4\alpha z, \qquad u^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2, \qquad \dot{x} = \dot{z}\sqrt{\alpha/z}$$

βρίσκουμε $\dot{z} = -\sqrt{2gz}$. Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή βρίσκουμε ότι ο χρόνος τ που ζητάμε είναι ίσος με

$$\tau = \int_0^\tau dt = \frac{-1}{\sqrt{2g}} \int_\alpha^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{g}}$$

7) Υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται με την επίδραση του βάρους του πάνω σε λεία κατακόρυφη περιφέρεια. Η περιφέρεια αυτή περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από κατακόρυφο άξονα Oz ο οποίος είναι κάθετος στον άξονα της περιφέρειας. Να μελετηθεί η κίνηση του Σ σχετικά με την περιφέρεια.

Λύση



Η Δ.Ε της σχετικής κίνησης του Σ είναι

$$m\gamma_{\sigma\chi.} = \mathbf{B} + \mathbf{R} + m\omega^2\overrightarrow{\Delta\Sigma} - 2m\omega x\upsilon_{\sigma\chi} \tag{1}$$

Πολ/ζοντας την (1) επί $\mathbf{e}_\vartheta$ και παίρνοντας υπόψη ότι

$$\gamma_{\sigma\chi.} \cdot \mathbf{e}_\vartheta = \alpha\ddot{\vartheta}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\vartheta = -mg\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\vartheta = mg\eta\mu\vartheta, \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_\vartheta = 0,$$

$$\overrightarrow{\Delta\Sigma} \cdot \mathbf{e}_\vartheta = (\overrightarrow{\Delta O} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{K\Sigma})\mathbf{e}_\vartheta = \overrightarrow{\Delta O} \cdot \mathbf{e}_\vartheta = -\Delta O\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\vartheta = \Delta O\eta\mu\vartheta =$$

$$= \alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta\eta\mu\vartheta, \qquad \upsilon_{\sigma\chi.} = \alpha\dot{\vartheta}\dot{\mathbf{e}}_\vartheta, \qquad (\omega x\upsilon_{\sigma\chi.})\mathbf{e}_\vartheta = 0$$

(όπου α είναι η ακτίνα της περιφέρειας) βρίσκουμε τελικά

$$\alpha\ddot{\vartheta} = (g + \alpha\omega^2\sigma\upsilon\nu\vartheta)\eta\mu\vartheta \tag{2}$$

Η (2) είναι η Δ.Ε της σχετικής κίνησης του Σ. Όταν το Σ ισορροπεί πάνω στην περιφέρεια, είναι $\ddot{\vartheta} = 0$, οπότε προκύπτει από την (2) ότι

$$\eta\mu\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta \equiv \vartheta_1^* = 0 \quad \text{και} \quad \vartheta \equiv \vartheta_2^* = \pi \tag{3}$$

ή

$$\sigma\upsilon\nu\vartheta = -g/\alpha\omega^2 < 0 \Rightarrow \vartheta \equiv \vartheta_3^* = \text{τοξ}\,\sigma\upsilon\nu(-g/\alpha\omega^2) \tag{4}$$

με την προϋπόθεση ότι

$$g/\alpha\omega^2 < 1 \quad \text{ή} \quad \omega^2 > g/\alpha \tag{5}$$

Ώστε, το ανώτατο ($\vartheta = 0$) και το κατώτατο ($\vartheta = \pi$) σημείο της περιφέρειας είναι σημεία ισορροπίας ανεξάρτητα από τη γωνιακή ταχύτητα. Για γωνιακές ταχύτητες αρκετά μεγάλες ώστε να ικανοποιούν τον περιορισμό (5), παρουσιάζονται άλλα δύο σημεία ισορροπίας στις συμμετρικές (ως προς την κατακόρυφη διάμετρο) θέσεις $\pm\vartheta_3^*$ ($\vartheta_3^* > \pi/2$).

Την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας θα τη βρούμε με τη μέθοδο των διαταραχών: α) **Σημείο $\vartheta = 0$.** Αν $\vartheta(t) = 0 + \delta\vartheta(t)$ είναι η διαταραγμένη κίνηση, τότε η (2) γίνεται σε πρώτη προσέγγιση $\delta\ddot{\vartheta} = (\omega^2 + g/\alpha)\delta\vartheta$. Άρα η διαταραχή $\delta\vartheta(t)$ δεν είναι περατωμένη και το σημείο $\vartheta = 0$ είναι ασταθές β) **Σημείο $\vartheta = \pi$.** Αν $\vartheta(t) = \pi + \delta\vartheta(t)$ είναι η διαταραγμένη κίνηση, τότε η (2) γίνεται σε πρώτη προσέγγιση $\delta\ddot{\vartheta} = (\omega^2 - g/\alpha)\delta\vartheta$. Άρα, όταν $\omega^2 > g/\alpha$ η $\delta\vartheta(t)$ δεν είναι περατωμένη και το σημείο $\vartheta = \pi$ είναι ασταθές ενώ όταν $\omega^2 \leqslant g/\alpha$ η $\delta\vartheta(t)$ είναι περατωμένη και το σημείο $\vartheta = \pi$ είναι ευσταθές.

γ) Σημεία $\vartheta = \pm\vartheta_3^*$. Αν $\vartheta(t) = \pm\ \vartheta_3^* + \delta\vartheta(t)$ είναι η διαταραγμένη κίνηση, τότε η (2) γίνεται σε πρώτη προσέγγιση $\delta\ddot{\vartheta} = \omega^{-2}(g^2/\alpha^2 - \omega^4)\delta\vartheta$. Επειδή $\omega^2 > g/\alpha$, η $\delta\vartheta(t)$ είναι περατωμένη και τα σημεία $\pm\vartheta_3^*$ είναι ευσταθή.

Για να βρούμε τα όρια της κίνησης θα χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα της κίνησης που προκύπτει από τη Δ.Ε (2) της κίνησης αν πολ/σουμε τα μέλη της επί $\dot{\vartheta}$ και ολοκληρώσουμε, δηλ. το

$$\alpha\dot{\vartheta}^2 + f(\vartheta) = \text{σταθ.} \equiv c \qquad (6)$$

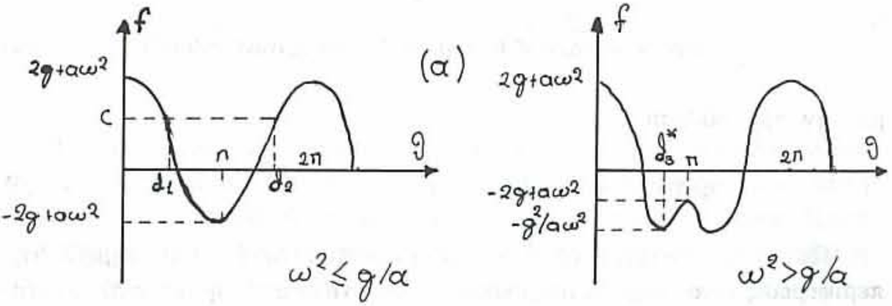
όπου η σταθερή c βρίσκεται από τις αρχικές συνθήκες και

$$f(\vartheta) = 2g\text{συν}\vartheta + \alpha\omega^2\text{συν}^2\vartheta \qquad (7)$$

Επειδή κατά την κίνηση είναι $\dot{\vartheta}^2 \geqslant 0$, από τις (6), (7) προκύπτει ότι

$$f(\vartheta) \leqslant c \qquad (8)$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\vartheta)$ εξαρτιέται από την ω και φαίνεται στο σχήμα 2.

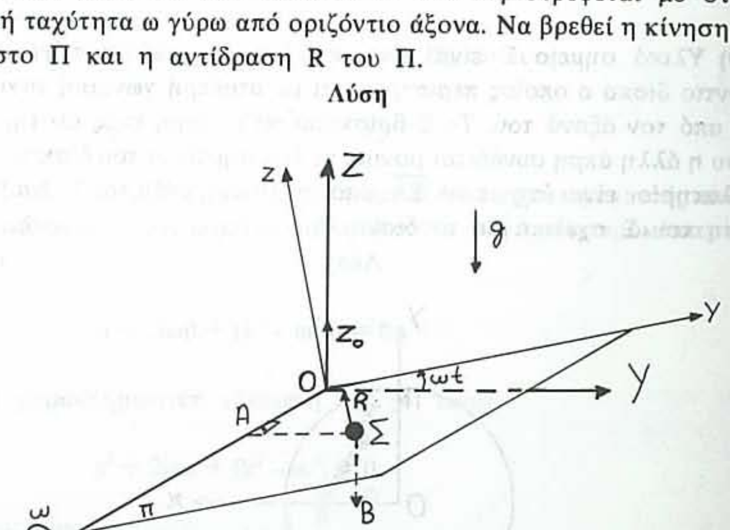


Σχήμα 2

Για δοσμένες αρχικές συνθήκες, υπολογίζουμε από την (6) την τιμή της c. Κατόπιν φέρνουμε μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα ϑ σε ύψος c. Τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με την καμπύλη $f(\vartheta)$ καθορίζουν τα όρια της κίνησης. Για παράδειγμα, στο σχήμα 2α, τα όρια είναι ϑ_1, ϑ_2 και η κίνηση γίνεται στο διάστημα $\vartheta_1 \leqslant \vartheta(t) \leqslant \vartheta_2$ επειδή στο διάστημα αυτό ικανοποιείται ο περιορισμός (8). Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(\vartheta)$ παίζει τον ίδιο ρόλο όπως η δυναμική ενέργεια στην ευθύγραμμη κίνηση και γιαυτό ονομάζεται **υποθετικό δυναμικό**. Στην περίπτωση του σχήματος 2α η καμπύλη του υποθετικού δυναμικού είναι ποιοτικά όμοια με την καμπύλη δυναμικού του απλού εκκρεμούς. Γι' αυτό, τα είδη των κινήσεων που συναντάμε στο εκκρεμές παρουσιάζονται και εδώ για μικρές γωνιακές ταχύτητες ($\omega^2 \leqslant g/\alpha$). Για μεγάλες γωνιακές ταχύτητες ($\omega^2 > g/\alpha$, σχήμα 2β) παρουσιάζεται η δυνατότητα για ταλαντώσεις γύρω από τα νέα σημεία ισορροπίας $\pm\vartheta_1^*$ όταν η c βρίσκεται στο διάστημα $-2g + \alpha\omega^2 < c < -g^2/\alpha\omega^2$. Παρατηρούμε επίσης (αφού παραγωγίσουμε ως προς t την 6) ότι τα σημεία ισορροπίας ($\dot{\vartheta} = \ddot{\vartheta} = 0$) είναι σημεία στάσης του υποθετικού δυναμικού, δηλ. ικανοποιούν την εξίσωση $df/d\vartheta = 0$. Τα ευσταθή σημεία ισορροπίας βρίσκονται μόνο εκεί που το υποθετικό δυναμικό έχει ελάχιστο.

8) Υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται με την επίδραση του βάρους του πάνω σε λείο επίπεδο Π που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από οριζόντιο άξονα. Να βρεθεί η κίνηση του Σ πάνω στο Π και η αντίδραση R του Π.

Λύση



Έστω OXYZ αδρανειακό σύστημα αξόνων **i, j, k** οι διανυσματικές μονάδες του περιστρεφομένου συστήματος Oxyz και z_0 η διανυσματική μονάδα του άξονα Z. Η Δ.Ε της σχετικής κίνησης του Σ είναι

$$m\boldsymbol{\gamma}_{\sigma\chi} = \mathbf{B} + \mathbf{R} + m\omega^2\overrightarrow{A\Sigma} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon}_{\sigma\chi} \quad (1)$$

όπου

$$\overrightarrow{A\Sigma} = y\mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\upsilon}_{\sigma\chi} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\gamma}_{\sigma\chi} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{i}$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon}_{\sigma\chi} = \omega\dot{y}\mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = -mg\mathbf{z}_0 = -mg(\sigma\upsilon\nu\omega t\mathbf{k} + \eta\mu\omega t\mathbf{j}), \quad \mathbf{R} = R\mathbf{k}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην (1) και παίρνοντας τις προβολές κατά τις διευθύνσεις των **i**, **j**, **k** βρίσκουμε

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g\eta\mu\omega t + \omega^2 y, \quad R = mg\sigma\upsilon\nu\omega t + 2m\omega\dot{y} \qquad (2)$$

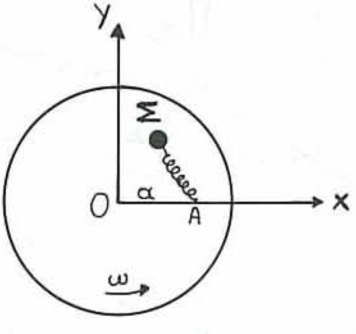
Ολοκληρώνοντας τις δύο πρώτες Δ.Ε βρίσκουμε

$$x = c_1 t + c_2, \quad y = c_3 e^{\omega t} + c_4 e^{-\omega t} + (g/2\omega^2)\eta\mu\omega t \qquad (3)$$

όπου οι σταθερές $c_1 - c_4$ υπολογίζονται με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών. Αντικαθιστώντας το y από την (3) στην (2) βρίσκουμε την αντίδραση R.

9) Υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο δίσκο ο οποίος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονά του. Το Σ βρίσκεται στην άκρη ενός ελατηρίου του οποίου η άλλη άκρη συνδέεται μόνιμα με ένα σημείο Α του δίσκου. Η έλξη του ελατηρίου είναι ίση με $mk^2\overrightarrow{\Sigma A}$, όπου m είναι η μάζα του Σ. Να βρεθεί η κίνηση του Σ σχετικά με το δίσκο.

Λύση



Η Δ.Ε της σχετικής κίνησης του Σ είναι

$$m\gamma_{\sigma\chi} = \mathbf{B} + \mathbf{F} + \mathbf{R} + m\omega^2\overrightarrow{O\Sigma} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon}_{\sigma\chi} \qquad (1)$$

Αν **i**, **j**, **k** είναι οι διανυσματικές μονάδες του περιστρεφόμενου συστήματος Oxyz και ΟΑ = α, θα είναι

$$\overrightarrow{O\Sigma} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\upsilon}_{\sigma\chi} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\gamma}_{\sigma\chi} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k},$$

$$B = -mgk, \quad R = Rk, \quad F = mk^2\overrightarrow{\Sigma A} = mk^2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Sigma}) =$$

$$= mk^2[(\alpha - x)i - yj] \qquad (R = \text{αντίδραση του } \Pi)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην (1) και παίρνοντας τις προβολές κατά τις διευθύνσεις των **i**, **j**, **k** βρίσκουμε $R = mg$ και

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - 2\omega\dot{y} + (k^2 - \omega^2)x = k^2\alpha \\ &\ddot{y} + 2\omega\dot{x} + (k^2 - \omega^2)y = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Οι (2) είναι οι Δ.Ε της σχετικής κίνησης του Σ και αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα Δ.Ε.

Μια μερική λύση του συστήματος (2) είναι η

$$x_p = k^2\alpha/(k^2 - \omega^2), \qquad y_p = 0 \tag{3}$$

Για να βρούμε τη γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος, εισάγουμε τη μιγαδική μεταβλητή $u = x + iy$ οπότε προκύπτει από τις (2) ότι

$$\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} + (k^2 - \omega^2)u = 0 \tag{4}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (4) είναι

$$s^2 + 2i\omega s + (k^2 - \omega^2) = 0$$

και έχει ρίζες $s_{1,2} = i(-\omega \pm k)$.

Άρα η λύση της (4) είναι

$$u = c_1e^{-i(\omega+k)t} + c_2e^{-i(\omega-k)t} \tag{6}$$

όπου c_1 και c_2 είναι μιγαδικές σταθερές.

Χωρίζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της λύσης (6) και προσθέτοντας σ' αυτά τη μερική λύση (3) βρίσκουμε ότι η γενική λύση του (2) είναι

$$x = k^2\alpha(k^2 - \omega^2)^{-1} + A_1\text{συν}[(k + \omega)t - \varphi_1] + A_2\text{συν}[(k - \omega)t - \varphi_2]$$

$$y = -A_1\text{ημ}[(k + \omega)t - \varphi_1] + A_2\text{ημ}[(k - \omega)t - \varphi_2]$$

όπου A_1, A_2, φ_1, φ_2 είναι πραγματικές σταθερές που υπολογίζονται με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών.

10) Υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο που βρίσκεται σε τόπο με γεωγραφικό πλάτος φ. Αν πάρουμε υπόψη την περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της, να αποδειχθεί ότι αν στο Σ δεν ενεργεί καμιά δύναμη (εκτός από το βάρος του), η κίνησή του στο επίπεδο είναι ομαλή κυκλική.

Λύση

Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, οι Δ.Ε της κίνησης του Σ πάνω στο οριζόντιο επίπεδο xy είναι

$$\ddot{x} + \Omega\dot{y} = 0, \qquad \ddot{y} - \Omega\dot{x} = 0 \tag{1}$$

όπου $\Omega = 2\omega\eta\mu\varphi$ ($\omega =$ γωνιακή ταχύτητα της Γης). Πολ/ζοντας την πρώτη εξίσωση επί $\dot{x}$, τη δεύτερη εξίσωση επί $\dot{y}$ και προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0 \qquad \text{ή} \qquad \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$$

Άρα

$$\upsilon^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \text{σταθ.} \equiv \upsilon_0^2 \tag{2}$$

δηλ. η ταχύτητα υ του Σ έχει σταθερό μέτρο.

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (1) βρίσκουμε

$$\dot{x} + \Omega y = c_1, \qquad \dot{y} - \Omega x = c_2 \tag{3}$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 υπολογίζονται με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών. Αντικαθιστώντας τα $\dot{x}$, $\dot{y}$ από τις (3) στην (2) βρίσκουμε

$$\left(x + \frac{c_2}{\Omega}\right)^2 + \left(y - \frac{c_1}{\Omega}\right)^2 = \left(\frac{\upsilon_0}{\Omega}\right)^2$$

Άρα η τροχιά είναι κυκλική με ακτίνα υ_0/Ω. Το κέντρο της έχει συντεταγμένες $x_0 = -c_2/\Omega$, $y = c_1/\Omega$. Αν ο παρατηρητής που βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης θεωρούσε τον εαυτό του ως αδρανειακό παρατηρητή, θα έβγαζε το συμπέρασμα ότι το Σ πρέπει να κάνει ευθύγραμμη ισοταχή κίνηση και όχι κυκλική επειδή η συνολική δύναμη που ενεργεί σ' αυτό είναι μηδενική (το βάρος του Σ εξουδετερώνεται από την αντίδραση του επιπέδου).

Β) ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

α) Συστήματα υλικών σημείων

1) Να βρεθεί ο χρόνος που χρειάζεται για να συναντηθούν η Γη και η Σελήνη αν υποθέσουμε ότι αρχικά ήσαν ακίνητες. Αν R και M είναι η ακτίνα και η μάζα της Γης και r και m είναι τα αντίστοιχα μεγέθη της Σελήνης, είναι $r = R/4$ και $m = M/81$. Επίσης, η (αρχική) απόσταση της Γης-Σελήνης είναι $\alpha = 60R$ ($R = 4000$ μίλια).

Λύση

Όπως γνωρίζουμε, η Δ.Ε της σχετικής κίνησης στο (μονοδιάστατο) πρόβλημα των δύο σωμάτων είναι

$$\ddot{x} = -k/x^2 \qquad (k = G(m + M)) \tag{1}$$

όπου x είναι η απόσταση ανάμεσα στα δύο υλικά σημεία.

Πολ/ζοντας την (1) επί $\dot{x}$ και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε

$$\dot{x}^2 = 2k/x + c \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας στην (2) τις αρχικές συνθήκες $x = \alpha$, $\dot{x} = 0$ η σταθερή c προκύπτει ίση με $c = -2k/\alpha$ οπότε η (2) γίνεται τελικά

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{2k}\cdot\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{\alpha}} \tag{3}$$

όπου το πρόσημο (–) σημαίνει ότι το x ελαττώνεται με το χρόνο.

Από την (3) προκύπτει με ολοκλήρωση ότι

$$\int_0^t dt = t = -\frac{1}{\sqrt{2k}}\int_\alpha^x \sqrt{\frac{\alpha x}{x-\alpha}}\,dx \tag{4}$$

Το ολοκλήρωμα (4) υπολογίζεται κάνοντας την αντικατάσταση $x = \alpha\sigma\upsilon\nu^2\varphi$ οπότε προκύπτει

$$t = \sqrt{\frac{\alpha^3}{2k}}\,(\varphi + \eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{2k}}\cdot\left[\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\sqrt{\frac{x}{\alpha}} + \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha x - x^2}\right] \tag{5}$$

Η συνάντηση Γης-Σελήνης θα γίνει τη στιγμή $t = \tau$ που θα είναι $x = R + r$. Αντικαθιστώντας το $x = R + r$ στην (5) και παίρνοντας υπόψη τα αριθμητικά δεδομένα βρίσκουμε $\tau \simeq 4.8$ ημέρες.

2) Δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 κινούνται πάνω σε ευθεία αλληλεπιδρώντας μεταξύ τους με δυνάμεις παγκόσμιας έλξης. Αρχικά, η σχετική απόστασή τους είναι α και το Σ_2 εκτοξεύεται με ταχύτητα υ_0 αντίθετη προς το Σ_1. Κάτω από ποια προϋπόθεση το Σ_2 θα συναντήσει το Σ_1; Μετά από πόσο χρόνο θα γίνει η συνάντηση;

Λύση

Όπως γνωρίζουμε, η Δ.Ε της σχετικής κίνησης των Σ_1 και Σ_2 είναι

$$\ddot{x} = -k/x^2 \tag{1}$$

όπου $k = G(m_1 + m_2)$ και x είναι η σχετική απόσταση των Σ_1, Σ_2. Πολ/ζοντας την (1) επί $\dot{x}$ και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε

$$\dot{x}^2 = 2k/x + c \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες $x = \alpha$, $\dot{x} = \upsilon_0$ στην (2) βρίσκουμε ότι η σταθερή c είναι ίση με $\upsilon_0^2 - 2k/\alpha$ οπότε η (2) γίνεται

$$\dot{x}^2 = \frac{2k}{x} + \upsilon_0^2 - \frac{2k}{\alpha} \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι αν $\upsilon_0^2 > 2k/\alpha$, τότε $\dot{x}^2 > 0$, δηλ. η ταχύτητα $\dot{x}$ ποτέ δε μηδενίζεται. Επομένως το Σ_2 θα απομακρύνεται συνεχώς από το Σ_1. Αν λοιπόν πρόκειται να συναντηθούν τα Σ_1, Σ_2, πρέπει να είναι $\upsilon_0^2 < 2k/\alpha$. Τότε η ταχύτητα $\dot{x}$ μηδενίζεται όταν

$$x = 2k/(2k/\alpha - \upsilon_0^2) \equiv b \tag{4}$$

Στην πρώτη φάση της κίνησης (από $x = \alpha$ μέχρι $x = b$) είναι $\dot{x} \geqslant 0$ (επειδή τα Σ_1, Σ_2 απομακρύνονται μεταξύ τους) οπότε από τις (3), (4) προκύπτει

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = + \sqrt{\frac{2k}{b}\left(\frac{b-x}{x}\right)} \tag{5}$$

Ολοκληρώνοντας την (5) βρίσκουμε ότι η χρονική διάρκεια τ_1 της πρώτης φάσης είναι ίση με

$$\tau_1 = \int_{\alpha}^{b} \sqrt{\frac{bx}{2k(b-x)}}\, dx \tag{6}$$

Το ολοκλήρωμα (6) υπολογίζεται κάνοντας την αντικατάσταση $x = b\eta\mu^2\varphi$. Τα όρια του φ είναι φ_0 (όπου $\eta\mu\varphi_0 = \sqrt{\alpha/b}$) και $\pi/2$ (για $x = b$). Προκύπτει ότι

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{b^3}{2k}} \int_{\varphi_0}^{\pi/2} (1 - \sigma\upsilon\nu 2\varphi)d\varphi = \sqrt{\frac{b^3}{2k}} \left[\frac{\pi}{2} - \tau o\xi\eta\mu \sqrt{\frac{\alpha}{b}} + \sqrt{\frac{\alpha(b-\alpha)}{b^2}}\right]$$

Μετά το μηδενισμό της (για $x = b$), η ταχύτητα $\dot{x}$ αλλάζει πρόσημο (γίνεται αρνητική), δηλ. το Σ_2 αρχίζει να πλησιάζει προς το Σ_1 και θα το συναντήσει όταν γίνει $x = 0$. Σε αυτή τη φάση της κίνησης (από $x = b$ μέχρι $x = 0$), η (3) δίνει επειδή $\dot{x} < 0$)

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{b}\left(\frac{b-x}{x}\right)} \tag{7}$$

Ολοκληρώνοντας όπως και πριν την (7) με όρια $x = b$ και $x = 0$ βρίσκουμε ότι η διάρκεια τ_2 της δεύτερης φάσης είναι

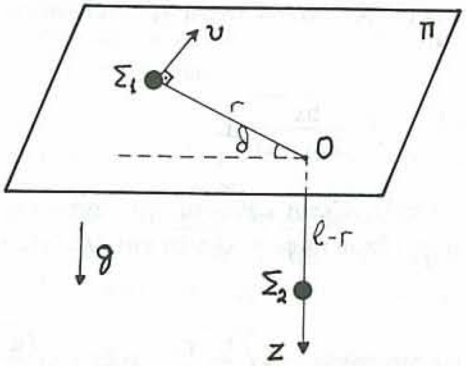
$$\tau_2 = \sqrt{\frac{b^3}{2k}} \int_0^b \sqrt{\frac{x}{b-x}}\, dx = \sqrt{\frac{b^3}{2k}} \int_0^{\pi/2} (1 - \sigma\upsilon\nu 2\varphi)d\varphi = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{b^3}{2k}}$$

Άρα η συνάντηση των Σ_1 και Σ_2 θα γίνει μετά από χρόνο $T = \tau_1 + \tau_2$.

3) Δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2, με μάζα m το καθένα, συνδέονται μεταξύ τους με μη-εκτατό νήμα που έχει μήκος l και περνάει από μια τρύπα Ο ενός λείου οριζόντιου επιπέδου Π. Το Σ_1 κινείται πάνω στο Π ενώ το Σ_2 κρέμεται κάτω από το Π και κινείται πάνω στην κατακόρυφη που περνάει από το Ο. Αρχικά το Σ_1 βρίσκεται σε απόσταση α από το Ο και έχει ταχύτητα $\sqrt{8g\alpha/3}$ κάθετη στην $O\Sigma_1$. Να αποδειχθεί ότι το Σ_2 θα ταλαντώνεται πάνω-κάτω με πλάτος ίσο προς α και ότι η τάση του νήματος θα μεταβάλλεται από $2mg/3$ μέχρι $11mg/6$.

Λύση

Για να βρούμε τα όρια της κίνησης του Σ_2 θα χρησιμοποιήσουμε τα ολοκληρώματα της κίνησης. Η ταχύτητα του Σ_2 είναι $d(O\Sigma_2)/dt = d(l - r)/$



$/dt = -\dot{r}$. Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του Σ_1 παραλείπεται (επειδή είναι σταθερή) ενώ του Σ_2 είναι $-mgO\Sigma_2 = -mg(l - r)$. Άρα το ολοκλήρωμα της ενέργειας για το σύστημα Σ_1, Σ_2 είναι

$$\frac{1}{2}\, m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\, m\upsilon_2^2 - mg(l - r) = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} m(-\dot{r})^2 - mg(l - r) = \text{σταθ.} \equiv E$$

ή

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2/2 + gr = \text{σταθ.} \equiv c_1 \tag{1}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) τις αρχικές συνθήκες $r = \alpha$, $\dot{r} = 0$, $r\dot{\vartheta} = \sqrt{8gl/3}$ βρίσκουμε ότι η σταθερή c_1 είναι ίση με $7g\alpha/3$.

Επειδή η ροπή, ως προς O, των δυνάμεων που ενεργούν στα Σ_1 και Σ_2 είναι μηδενική, η στροφορμή του συστήματος ως προς το O διατηρείται σταθερή, δηλ.

$$L = mr^2\dot{\vartheta} = \text{σταθ.} \quad \text{ή} \quad r^2\dot{\vartheta} = \text{σταθ.} \equiv c_2 \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας στην (2) τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε ότι η σταθερή c_2 είναι ίση με $\alpha\sqrt{8gl/3}$.

Λύνοντας την (2) ως προς $\dot{\vartheta}$ και αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε τελικά

$$3r^2\dot{r}^2 = -g(3r^3 - 7\alpha r^2 + 4\alpha^3) = -g(r - \alpha)(r - 2\alpha)(3r + 2\alpha) \tag{3}$$

Κατά τη διάρκεια της κίνησης είναι $r^2\dot{r}^2 \geqslant 0$. Επομένως, σύμφωνα με την (3), θα είναι $(r - \alpha)(r - 2\alpha) \geqslant 0$ ή $2\alpha \geqslant r \geqslant \alpha$. Ώστε το Σ_1 κινείται μέσα στον δακτύλιο $2\alpha \geqslant r \geqslant \alpha$ και ταυτόχρονα το Σ_2 κάνει ταλάντωση με πλάτος $2\alpha - \alpha = \alpha$.

Αν T είναι η τάση του νήματος, η Δ.Ε της κίνησης του Σ_2 είναι

$$m\,\frac{d^2(l-r)}{dt^2} = mg - T \quad \Rightarrow \quad T = mg + m\ddot{r} \tag{4}$$

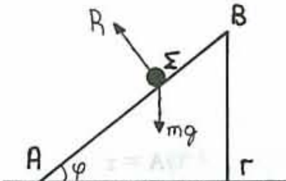
Παραγωγίζοντας την (3) βρίσκουμε $\ddot{r} = 4g\alpha^3/3r^2 - g/2$. Επομένως η (4) γίνεται

$$T = \left(\frac{4\alpha^3}{3r^3} + \frac{1}{2}\right)mg$$

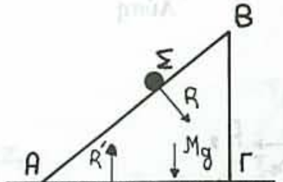
Άρα, όταν το r μεταβάλλεται από α μέχρι 2α η τάση T μεταβάλλεται από 11mg/6 μέχρι 2mg/3.

4) Το υλικό σημείο Σ στο παρακάτω σχήμα 1 γλυστράει με την επίδραση του βάρους του πάνω στη λεία σφήνα ΑΒΓ. Η σφήνα μπορεί να γλυστράει πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί η επιτάχυνση της σφήνας και η αντίδραση R της σφήνας πάνω στο Σ. Οι μάζες της σφήνας και του Σ είναι, αντίστοιχα, ίσες με M και m.

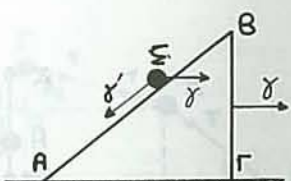
Λύση



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Στα σχήματα (1) και (2) φαίνονται, αντίστοιχα, οι δυνάμεις που ενεργούν στο Σ καί στη σφήνα. R και R′ είναι, αντίστοιχα, τα μέτρα των αντιδράσεων ανάμεσα σε Σ-σφήνα και σφήνα-επίπεδο. Στο σχήμα 3 φαίνονται οι επιταχύνσεις: γ′ είναι η επιτάχυνση του Σ ως προς τη σφήνα και γ είναι η επιτάχυνση της σφήνας ως προς το επίπεδο.

Αναλύοντας τις δυνάμεις και τις επιταχύνσεις του Σ κατά την $\overrightarrow{BA}$ και κάθετα προς αυτή, βρίσκουμε

	κατά την $\overrightarrow{BA}$	κάθετα στην $\overrightarrow{BA}$
Δύναμη	mgημφ	mgσυνφ − R
Επιτάχυνση	γ′ − γσυνφ	γημφ

Άρα οι Δ.Ε της κίνησης του Σ είναι

$$mg\eta\mu\varphi = m(\gamma' - \gamma\sigma\upsilon\nu\varphi), \quad mg\sigma\upsilon\nu\varphi - R = m\gamma\eta\mu\varphi \qquad (1)$$

Αναλύοντας τις δυνάμεις και την επιτάχυνση της σφήνας κατά την οριζόντια και την κατακόρυφη διεύθυνση, βρίσκουμε ότι οι Δ.Ε της κίνησής της είναι

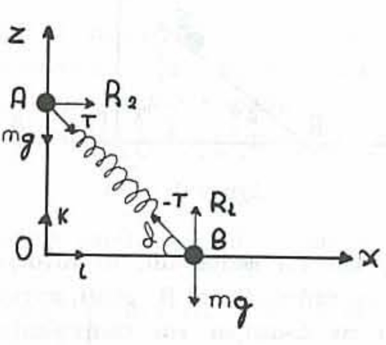
Οριζόντια: $R\eta\mu\varphi = M\gamma$ και κατακόρυφα: $R\sigma\upsilon\nu\varphi + Mg - R' = 0$ (2)

Από τις εξισώσεις (1) και (2) υπολογίζονται οι 4 άγνωστοι γ, γ', R, R'. Εδώ μας ενδιαφέρουν μόνο οι γ και R. Προκύπτει λοιπόν

$$\gamma = \frac{mg\sigma\upsilon\nu\varphi\,\eta\mu\varphi}{M + m\eta\mu^2\varphi}, \qquad R = \frac{Mmg\,\sigma\upsilon\nu\varphi}{M + m\eta\mu^2\varphi}$$

5) Δύο ίσες μάζες συνδέονται μεταξύ τους με ένα ελατήριο. Η μια είναι υποχρεωμένη να κινείται πάνω στο οριζόντιο άξονα Οx και η άλλη πάνω στον κατακόρυφο άξονα Οz. Να βρεθούν οι Δ.Ε της κίνησης.

Λύση



$OA = z$

$OB = x$

$AB = l$

Οι Δ.Ε της κίνησης των μαζών Α και Β είναι

$$m\ddot{z}\mathbf{k} = -mg\mathbf{k} + \mathbf{T} + \mathbf{R}_2 \qquad (1)$$

$$m\ddot{x}\mathbf{i} = -mg\mathbf{k} - \mathbf{T} + \mathbf{R}_1 \qquad (2)$$

όπου οι αντιδράσεις $\mathbf{R}_1 = R_1\mathbf{k}$, $\mathbf{R}_2 = R_2\mathbf{i}$ των αξόνων είναι κάθετες σ' αυτούς και $T = k(l - l_0)$ είναι το μέτρο της τάσης του ελατηρίου

(l_0 = φυσικό μήκος ελατηρίου). Παίρνοντας τις προβολές των (1) και (2) κατά τις διευθύνσεις των **i** και **j** βρίσκουμε

$$m\ddot{z} = -mg - T\eta\mu\vartheta = -mg - T\left(\frac{z}{l}\right) = -mg - kz\left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \tag{3}$$

$$m\ddot{x} = -T\sigma\upsilon\nu\vartheta = -T\left(\frac{x}{l}\right) = -kx\left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \tag{4}$$

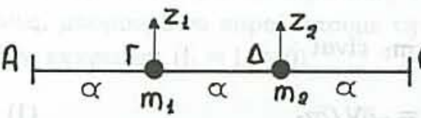
$$0 = T\sigma\upsilon\nu\vartheta + R_2, \qquad 0 = -mg + T\eta\mu\vartheta + R_1 \tag{5}$$

όπου $l = \sqrt{x^2 + z^2}$.

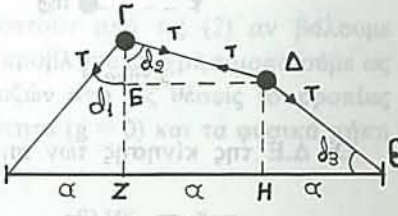
Οι (3) και (4) είναι οι Δ.Ε της κίνησης των μαζών Α, Β και οι (5) δίνουν τις αντιδράσεις των αξόνων.

6) Οι δύο μάζες m_1 και m_2 στο παρακάτω σχήμα 1 κάνουν κατακόρυφες ταλαντώσεις με μικρά πλάτη z_1 και z_2. Δεχόμαστε ότι η τάση Τ της χορδής ΑΒ παραμένει σταθερή και ότι η επίδραση της βαρύτητας είναι ασήμαντη. Να βρεθούν οι Δ.Ε των ταλαντώσεων.

Λύση



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Σε κάθε μάζα ενεργούν οι τάσεις των δύο τμημάτων της χορδής με τα οποία αυτή συνδέεται (το βάρος παραλείπεται). Οι τάσεις έχουν το ίδιο μέτρο Τ αλλά διαφορετικές διευθύνσεις (βλέπε στο σχήμα 2).

Οι Δ.Ε της κίνησης των m_1 και m_2 κατά την κατακόρυφη διεύθυνση είναι

$$m_1\ddot{z}_1 = -T\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 - T\sigma\upsilon\nu\vartheta_2, \qquad m_2\ddot{z}_2 = T\sigma\upsilon\nu\vartheta_2 - T\eta\mu\vartheta_3 \tag{1}$$

όπου $\vartheta_1 = A\hat{\Gamma}Z$, $\vartheta_2 = Z\hat{\Gamma}\Delta$, $\vartheta_3 = \Delta\hat{B}H$.

Επειδή τα z_1, z_2 είναι μικρά, θα είναι

$$\text{συν}\vartheta_1 = \frac{\Gamma Z}{\mathrm{A}\Gamma} \simeq \frac{\Gamma Z}{\mathrm{A}Z} = \frac{z_1}{\alpha}, \quad \text{συν}\vartheta_2 = \frac{\Gamma \mathrm{E}}{\Gamma\Delta} \simeq \frac{\Gamma Z - \mathrm{H}\Delta}{\mathrm{H}Z} = \frac{z_1 - z_2}{\alpha}$$

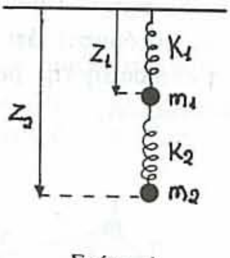
$$\text{ημ}\vartheta_3 = \mathrm{H}\Delta/\Delta\mathrm{B} \simeq \mathrm{H}\Delta/\mathrm{HB} = z_2/\alpha$$

Άρα οι Δ.Ε (1) γίνονται τελικά

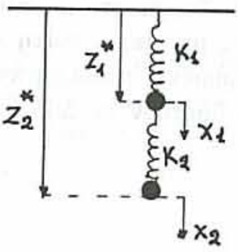
$$m_1\ddot{z}_1 + T\alpha^{-1}(2z_1 - z_2) = 0, \qquad m_2\ddot{z}_2 + T\alpha^{-1}(2z_2 - z_1) = 0$$

7) Να βρεθούν οι Δ.Ε της κίνησης και τα σημεία ισορροπίας των μαζών m_1 και m_2 που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα 1.

Λύση



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Οι Δ.Ε της κίνησης των m_1 και m_2 είναι

$$m_1\ddot{z}_1 = -\partial V/\partial z_1, \qquad m_2\ddot{z}_2 = -\partial V/\partial z_2 \tag{1}$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος m_1, m_2 είναι

$$V = -m_1gz_1 - m_2gz_2 + \frac{1}{2}\,k_1(z_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2}\,k_2(z_2 - z_1 - l_2)^2$$

όπου l_1 και l_2 είναι τα φυσικά μήκη των εκκρεμών.

Επομένως, οι Δ.Ε (1) γίνονται τελικά

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{z}_1 + k_1(z_1 - l_1) - k_2(z_2 - z_1 - l_2) - m_1g = 0 \\ &m_2\ddot{z}_2 + k_2(z_2 - z_1 - l_2) - m_2g = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Οι θέσεις ισορροπίας z_1^* και z_2^* των m_1 και m_2 βρίσκονται από τις Δ.Ε (2) αν μηδενίσουμε τις επιταχύνσεις $\ddot{z}_1$, $\ddot{z}_2$ και λύσουμε ως προς z_1 και z_2. Προκύπτει

$$z_1^* = l_1 + (m_1 + m_2)g/k, \quad z_2^* = z_1^* + l_2 + m_2g/k \tag{3}$$

Η πρώτη από τις (3) εκφράζει το γεγονός ότι η τάση $k_1(z_1^* - l_1)$ του ελατηρίου k_1 εξισορροπεί το συνολικό βάρος $(m_1 + m_2)g$, ενώ η δεύτερη σχέση εκφράζει το γεγονός ότι η τάση $k_2(z_2^* - z_1^* - l_2)$ του ελατηρίου k_2 εξισορροπεί το βάρος m_2g.

Αν x_1 και x_2 είναι, αντίστοιχα, οι μετατοπίσεις των μαζών m_1 και m_2 από τις θέσεις ισορροπίας z_1^* και z_2^*, δηλ. αν

$$z_1 = z_1^* + x_1, \qquad z_2 = z_2^* + x_2 \tag{4}$$

και αντικαταστήσουμε τις (4), (3) στις Δ.Ε (2), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0 \\ &m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Παρατηρούμε ότι οι Δ.Ε (5) προκύπτουν από τις (2) αν βάλουμε $g = l_1 = l_2 = 0$. Ώστε, όταν (σε παρόμοια προβλήματα) χρησιμοποιούμε ως συντεταγμένες τις απομακρύνσεις των μαζών από τις θέσεις ισορροπίας τους, μπορούμε να παραλείπουμε τη βαρύτητα ($g = 0$) και τα φυσικά μήκη των εκκρεμών ($l_1 = l_2 = 0$).

8) Να βρεθούν οι Δ.Ε της κίνησης για τα συστήματα που φαίνονται στα παρακάτω σχήματα 1 και 2.

Λύση

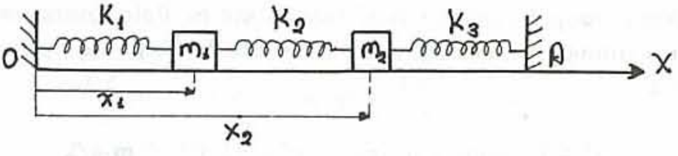
α) Οι Δ.Ε της κίνησης των m_1, m_2 είναι

$$m_1\ddot{x}_1 = -\partial V/\partial x_1, \qquad m_2\ddot{x}_2 = -\partial V/\partial x_2 \tag{1}$$

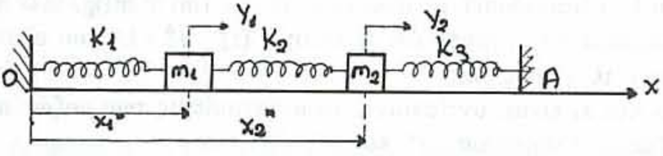
Η δυναμική ενέργεια του συστήματος m_1, m_2 είναι

$$V = \frac{1}{2}\, k_1(x_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2}\, k_2(x_2 - x_1 - l_2)^2 + \frac{1}{2}\, k_3(d - x_2 - l_3)^2$$

όπου l_1, l_2, l_3 είναι τα φυσικά μήκη των εκκρεμών και $d = OA$.



Σχήμα 1α



Σχήμα 1β

Επομένως οι (1) γίνονται

$$
\begin{aligned}
& m_1\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - l_1) - k_2(x_2 - x_1 - l_2) = 0 \\
& m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1 - l_2) - k_3(d - x_2 - l_3) = 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

Οι θέσεις ισορροπίας x_1^* και x_2^* βρίσκονται αν στις (2) βάλουμε $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$, δηλ. ικανοποιούν τις εξισώσεις

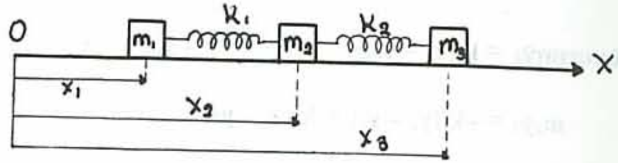
$$
\begin{aligned}
& k_1(x_1^* - l_1) - k_2(x_2^* - x_1^* - l_2) = 0 \\
& k_2(x_2^* - x_1^* - l_2) - k_3(d - x_2^* - l_3) = 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

Αν y_1 και y_2 είναι οι μετατοπίσεις των m_1 και m_2 από τις θέσεις ισορροπίας (βλέπε στο σχήμα 1β), δηλ. αν $x_1 = x_1^* + y_1$, $x_2 = x_2^* + y_2$, οι Δ.Ε (2) γίνονται (με τη βοήθεια των σχέσεων 3)

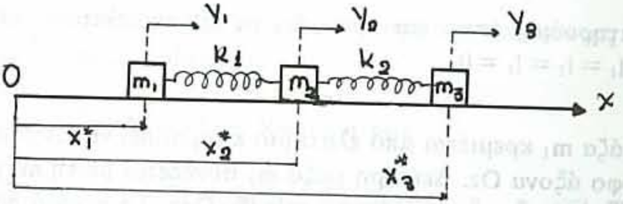
$$
\begin{aligned}
& m_1\ddot{y}_1 + k_1y_1 - k_2(y_2 - y_1) = 0 \\
& m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) + k_3y_2 = 0
\end{aligned} \tag{4}
$$

Παρατηρούμε ότι, όπως και στην προηγούμενη άσκηση, οι Δ.Ε (4) προκύπτουν από τις Δ.Ε (2) αν βάλουμε $l_1 = l_2 = l_3 = 0$.

β)



Σχήμα 2α



Σχήμα 2β

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος m_1, m_2, m_3 είναι

$$V = \frac{1}{2}\, k_1(x_2 - x_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2}\, k_2(x_3 - x_2 - l_2)^2$$

Άρα οι Δ.Ε της κίνησης $m_i\ddot{x}_i = -\partial V/\partial x_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ γίνονται

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= k_1(x_2 - x_1 - l_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_1(x_2 - x_1 - l_1) + k_2(x_3 - x_2 - l_2) \\ m_3\ddot{x}_3 &= -k_2(x_3 - x_2 - l_2) \end{aligned} \tag{5}$$

Επομένως, οι θέσεις ισορροπίας x_1^*, x_2^*, x_3^* των m_1, m_2, m_3 επαληθεύουν τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(x_2^* - x_1^* - l_1) \\ 0 &= -k_1(x_2^* - x_1^* - l_1) + k_2(x_3^* - x_2^* - l_2) \\ 0 &= -k_2(x_3^* - x_2^* - l_2) \end{aligned}$$

Αν y_1, y_2, y_3 είναι οι μετατοπίσεις των m_1, m_2, m_3 από τις θέσεις ισορροπίας τους, δηλ. αν $x_1 = x_1^* + y_1$, $x_2 = x_2^* + y_2$, $x_3 = x_3^* + y_3$, τότε οι

Δ.Ε (5) γίνονται

$$m_1\ddot{y}_1 = k_1(y_2 - y_1)$$

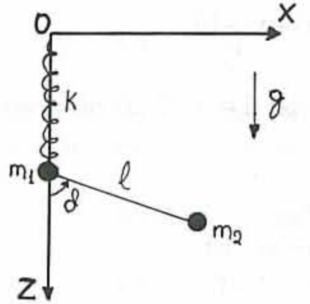
$$m_2\ddot{y}_2 = -k_1(y_2 - y_1) + k_2(y_3 - y_2) \tag{6}$$

$$m_3\ddot{y}_3 = -k_2(y_3 - y_2)$$

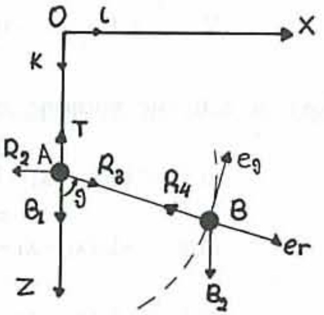
Παρατηρούμε, όπως και πριν, ότι οι (6) προκύπτουν από τις (5) αν βάλουμε $l_1 = l_2 = l_3 = 0$.

9) Μάζα m_1 κρεμιέται από ελατήριο και μπορεί να κινείται πάνω στον κατακόρυφο άξονα Oz. Δεύτερη μάζα m_2 συνδέεται με τη m_1 με ραβδί και κινείται ελεύθερα στο κατακόρυφο επίπεδο Oxz. Το στερεό ραβδί δεν έχει βάρος και δεν υπάρχει τριβή. Να βρεθούν οι Δ.Ε της κίνησης.

Λύση



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Οι δυνάμεις που ενεργούν σε κάθε μάζα φαίνονται στο σχήμα 2 και είναι: τα βάρη $\mathbf{B}_1 = m_1g\mathbf{k}$, $\mathbf{B}_2 = m_2g\mathbf{k}$, η έλξη του ελατηρίου $\mathbf{T} = -k(z_1 - l_0)$, η αντίδραση $\mathbf{R}_2 = -R_2\mathbf{i}$ του άξονα z και οι αντιδράσεις $\mathbf{R}_3 = R\mathbf{e}_r$, $\mathbf{R}_4 = -\mathbf{R}_3 = -R\mathbf{e}_r$ του ραβδιού AB. (Το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι l_0 και $AB = l$).

Οι Δ.Ε της κίνησης των m_1, m_2 είναι

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{T} + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{B}_1 = -k(z_1 - l_0)\mathbf{k} - R_2\mathbf{i} + R\mathbf{e}_r + m_1g\mathbf{k} \tag{1}$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{R}_4 + \mathbf{B}_2 = -R\mathbf{e}_r + m_2g\mathbf{k} \tag{2}$$

Ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OA} = z_1\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = z_1\mathbf{k} + l\mathbf{e}_r, \qquad \mathbf{k} = \sigma\upsilon\nu\vartheta\mathbf{e}_r - \eta\mu\vartheta\mathbf{e}_\vartheta$$

από τις οποίες προκύπτει

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{z}_1\mathbf{k}, \qquad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{r}}_1 + l\ddot{\mathbf{e}}_r = (\ddot{z}_1\sigma\upsilon\nu\vartheta - l\dot{\vartheta}^2)\mathbf{e}_r - (\ddot{z}_1\eta\mu\vartheta - l\ddot{\vartheta})\mathbf{e}_\vartheta$$

Προβάλλοντας την (1) κατά τη διεύθυνση **k** και παίρνοντας υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε

$$m_1\ddot{z}_1 = -k(z_1 - l_0) + R\sigma\upsilon\nu\vartheta + m_1 g \tag{3}$$

Προβάλλοντας την (2) κατά τις διευθύνσεις $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_r$ και παίρνοντας υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε

$$m_2(\ddot{z}_1\eta\mu\vartheta - l\ddot{\vartheta}) = m_2 g\eta\mu\vartheta \tag{4}$$

$$m_2(\ddot{z}_1\sigma\upsilon\nu\vartheta - l\dot{\vartheta}^2) = -R + m_2 g\sigma\upsilon\nu\vartheta \tag{5}$$

Από την (4) προκύπτει ότι

$$l\ddot{\vartheta} + (g - \ddot{z}_1)\eta\mu\vartheta = 0 \tag{6}$$

Λύνοντας την (5) ως προς R και παίρνοντας υπόψη την (6), η (3) γίνεται

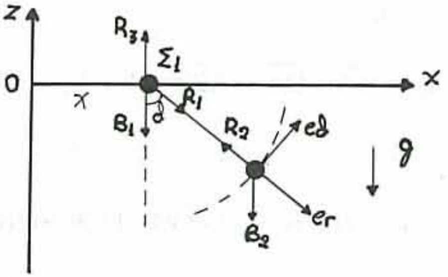
$$(m_1 + m_2)\ddot{z}_1 - m_2 l\ddot{\vartheta}\eta\mu\vartheta - m_2 l\dot{\vartheta}^2\sigma\upsilon\nu\vartheta + k(z_1 - l_0) - (m_1 + m_2)g = 0 \tag{7}$$

Οι εξισώσεις (6) και (7) είναι οι Δ.Ε της κίνησης με άγνωστους τις παράμετρες z_1 και ϑ που καθορίζουν τη θέση των m_1 και m_2.

10) Δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 συνδέονται μεταξύ τους με ένα ραβδί που δεν έχει βάρος και έχει μήκος l. Το Σ_1 είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω στο λείο οριζόντιο άξονα Ox ενώ το Σ_2 κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο Oxz. Να βρεθεί η κίνηση.

Λύση

Οι δυνάμεις που ενεργούν στα Σ_1, Σ_2 φαίνονται στο σχήμα. $\mathbf{R}_3$ είναι η αντίδραση του οριζόντιου άξονα στο Σ_1 και $\mathbf{R}_1 = R\mathbf{e}_r$, $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{R}_1$ είναι οι δυνάμεις που εξασκεί το ραβδί στα Σ_1 και Σ_2.



Οι Δ.Ε της κίνησης των Σ_1, Σ_2 είναι

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{B}_1 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_1 \tag{1}$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{B}_2 + \mathbf{R}_2 \tag{2}$$

Ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{O\Sigma_1}\cdot\mathbf{i} = x\mathbf{i}, \qquad \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{O\Sigma_2} = \overrightarrow{O\Sigma_1} + \overrightarrow{\Sigma_1\Sigma_2} = x\mathbf{i} + l\mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{e}_r = \eta\mu\vartheta\mathbf{i} - \sigma\upsilon\nu\vartheta\mathbf{j}, \qquad \ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{x}\mathbf{i}, \qquad \ddot{\mathbf{r}}_2 = [\ddot{x} + l(\dot{\eta\mu\vartheta})^{\cdot}]\mathbf{i} - \tag{3}$$

$$- l(\dot{\sigma\upsilon\nu\vartheta})^{\cdot}\mathbf{j} = \ddot{x}\mathbf{i} + l\ddot{\mathbf{e}}_r = \ddot{x}\mathbf{i} + l\ddot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta - l\dot{\vartheta}^2\mathbf{e}_r = (\ddot{x}\sigma\upsilon\nu\vartheta + l\ddot{\vartheta})\mathbf{e}_\vartheta +$$

$$+ (\ddot{x}\eta\mu\vartheta - l\dot{\vartheta}^2)\mathbf{e}_r$$

Πολ/ζοντας τις (1) και (2) επί **i** και παίρνοντας υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε

$$m_1\ddot{x} = R\eta\mu\vartheta, \qquad m_2[\ddot{x} + l(\dot{\eta\mu\vartheta})^{\cdot}] = -R\eta\mu\vartheta$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l(\dot{\eta\mu\vartheta})^{\cdot} = 0 \tag{4}$$

Πολ/ζοντας την (2) επί $\mathbf{e}_\vartheta$ και παίρνοντας υπόψη τις (3) βρίσκουμε

$$\ddot{x}\sigma\upsilon\nu\vartheta + l\ddot{\vartheta} = -g\eta\mu\vartheta \tag{5}$$

Οι (4) και (5) είναι οι Δ.Ε της κίνησης των Σ_1, Σ_2.

Για να είμαστε περισσότερο συγκεκριμένοι, ας υποθέσουμε ότι οι κινήσεις που μελετάμε έχουν αρχικές συνθήκες $x_0 = \vartheta_0 = 0$, $\dot{x}_0 \neq 0$, $\dot{\vartheta}_0 \neq 0$.

Ολοκληρώνοντας δύο φορές την (4) και παίρνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l\,\eta\mu\vartheta = (m_1 + m_2)\dot{x}_0 + m_2 l\dot{\vartheta}_0 t \qquad (6)$$

Απαλοίφοντας το $\ddot{x}$ ανάμεσα στις (4) και (5) βρίσκουμε τελικά (αφού εκτελέσουμε την παραγώγιση $(\dot{\eta\mu}\vartheta)$)

$$(m_1 + m_2\eta\mu^2\vartheta)\ddot{\vartheta} + m_2\dot{\vartheta}^2\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta = -(m_1 + m_2)gl^{-1}\eta\mu\vartheta \qquad (7)$$

Κάνοντας στην (7) την αντικατάσταση $p = \dot{\vartheta}^2$, οπότε $\ddot{\vartheta} = 2^{-1}\, dp/d\vartheta$, και ολοκληρώνοντας ως προς ϑ βρίσκουμε (αφού πάρουμε υπόψη τις αρχικές συνθήκες)

$$p = \dot{\vartheta}^2 = \frac{2gl^{-1}(m_1 + m_2)(\sigma\upsilon\nu\vartheta - 1) + m_1\dot{\vartheta}_0{}^2}{m_1 + m_2\eta\mu^2\vartheta} \equiv f(\vartheta) \geqslant 0 \qquad (8)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(\vartheta)$ είναι μια περατωμένη περιοδική συνάρτηση. Όταν $\sigma\upsilon\nu\vartheta = -1$, ο πρώτος όρος του αριθμητή της (8) παίρνει την ελάχιστη τιμή του που είναι ίση με $-4gl^{-1}(m_1 + m_2)$. Επομένως όταν είναι

$$\dot{\vartheta}_0^2 > 4g(m_1 + m_2)/m_1 l$$

τότε ο αριθμητής της (8) είναι πάντα θετικός, δηλ. η $\dot{\vartheta}$ δε μηδενίζεται ποτέ. Άρα η γωνία ϑ αυξάνεται συνεχώς (αν $\dot{\vartheta}_0 > 0$) ή ελαττώνεται συνεχώς (αν $\dot{\vartheta}_0 < 0$). Αυτό σημαίνει ότι το Σ_2 περιστρέφεται συνεχώς κατά την ίδια φορά. Όταν είναι·

$$\dot{\vartheta}_0^2 < 4g(m_1 + m_2)/m_1 l$$

Ο αριθμητής της (8) μηδενίζεται για κάποιες τιμές $\pm\vartheta^*$ της ϑ, δηλ. είναι

$$2gl^{-1}(m_1 + m_2)[\sigma\upsilon\nu(\pm\vartheta^*) - 1] + m_1\dot{\vartheta}_0^2 = 0$$

Στις θέσεις $\pm\vartheta^*$ η $\dot{\vartheta}$ αλλάζει πρόσημο, δηλ. αντιστρέφεται η φορά της κίνησης του Σ_2. Επομένως, η κίνηση του Σ_2 είναι ταλάντωση με όρια $\pm\vartheta^*$.

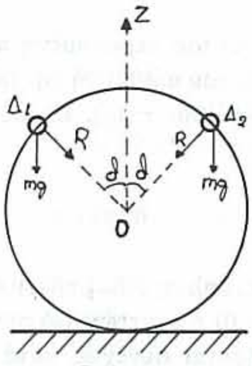
Όταν είναι

$$\dot{\vartheta}_0^2 = 4g(m_1 + m_2)/m_1 l$$

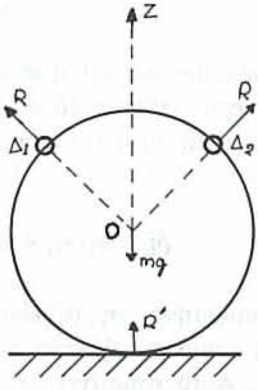
η ολοκλήρωση της (8) δίνει ότι για $t \to \infty$ είναι $\vartheta \to \pi$, δηλ. το Σ_2 τείνει ασυμπτωτικά στο ανώτατο σημείο της τροχιάς του.

11) Δύο μικρά δαχτυλίδια Δ_1, Δ_2 είναι περασμένα σε λείο ομογενές κυκλικό στεφάνι. Το στεφάνι στέκεται με το επίπεδο του κατακόρυφο ακουμπώντας σε οριζόντιο τραπέζι. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί και τα δαχτυλίδια κρατιούνται στην κορυφή του στεφανιού. Σε μια στιγμή τα δαχτυλίδια αφήνονται να γλυστρήσουν το καθένα προς την αντίθετη κατεύθυνση. Να βρεθεί η συνθήκη που πρέπει να ισχύει για να σηκωθεί το στεφάνι από το τραπέζι. Η μάζα του στεφανιού είναι M και του κάθε δαχτυλιδιού είναι m.

Λύση



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Τα δαχτυλίδια πέφτουν με συμμετρικό τρόπο. Όσο το στεφάνι ακουμπάει στο τραπέζι, οι δυνάμεις που ενεργούν στα δαχτυλίδια και στο στεφάνι φαίνονται, αντίστοιχα, στα σχήματα 1 και 2. Οι αντιδράσεις ανάμεσα στα δαχτυλίδια και στο στεφάνι έχουν μέτρο R και η αντίδραση του τραπεζιού πάνω στο στεφάνι έχει μέτρο R΄.

Η συνολική δύναμη που ενεργεί στο στεφάνι κατά την κατακόρυφη διεύθυνση Oz, δηλ. η δύναμη $F = R' + 2R\sigma\upsilon\nu\vartheta - Mg$, πρέπει να είναι ίση με μηδέν όσο το στεφάνι μένει ακίνητο πάνω στο τραπέζι. Τότε θα είναι

$$R' = Mg - 2R\sigma\upsilon\nu\vartheta \qquad (1)$$

Καθώς τα δαχτυλίδια πέφτουν, η γωνία ϑ αυξάνεται και η αντίδραση R΄, σύμφωνα με την (1), ελαττώνεται. Τη στιγμή που θα μηδενιστεί η R΄, τότε το στεφάνι θα πάψει να ακουμπάει στο τραπέζι. Για να μηδενιστεί η R΄ πρέπει, σύμφωνα με την (1), η R να ικανοποιεί τη σχέση

$$Mg - 2R\text{συν}\vartheta = 0 \tag{2}$$

Ας υπολογίσουμε λοιπόν την R. Η κεντρομόλα δύναμη $m\upsilon^2/\alpha$ που ενεργεί σε κάθε δαχτυλίδι προέρχεται από την αντίδραση R και τη συνιστώσα $mg\text{συν}\vartheta$ του βάρους του, δηλ.

$$m\upsilon^2/\alpha = R + mg\text{συν}\vartheta \tag{3}$$

Η ενέργεια του καθενός δαχτυλιδιού είναι σταθερή και ίση με

$$E = m\upsilon^2/2 + mg\alpha\text{συν}\vartheta = \text{σταθ.} = mg\alpha \tag{4}$$

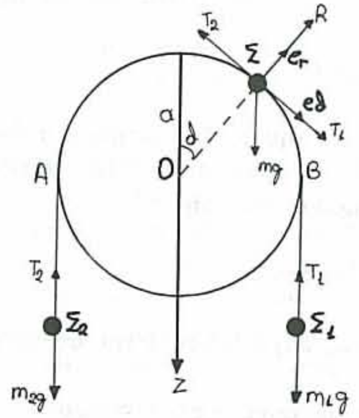
όπου α είναι η ακτίνα του στεφανιού. Αντικαθιστώντας το υ^2 από την (4) στην (3) βρίσκουμε $R = mg(2\text{-}3\text{συν}\vartheta)$ οπότε η (2) γίνεται $6m\text{συν}^2\vartheta -$ $- 4m\text{συν}\vartheta + M = 0$. ΄Αρα

$$\text{συν}\vartheta = \frac{1}{3}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{3M}{2m}}\right] \tag{5}$$

με την προϋπόθεση βέβαια ότι είναι $m \geqslant 3M/2$. Αν λοιπόν είναι $m < 3M/2$, η R΄ δε μηδενίζεται και το στεφάνι δεν μπορεί να εγκαταλείψει το τραπέζι. Αν όμως είναι $m \geqslant 3M/2$ τότε η R΄ μηδενίζεται όταν τα δαχτυλίδια βρεθούν σε εκείνη τη θέση ϑ που αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή της ϑ που προκύπτει από την (5). Η μεγαλύτερη τιμή της ϑ (που αντιστοιχεί στο πρόσημο (–) της 5) δεν έχει φυσική σημασία γιατί το στεφάνι θα έχει ήδη εγκαταλείψει το τραπέζι όταν η ϑ γίνει ίση με τη μικρότερη τιμή (που αντιστοιχεί στο πρόσημο (+) της 5).

12) ΄Ενα νήμα που δεν έχει βάρος και δεν είναι εκτατό συνδέει δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα. Το νήμα περνάει από μια ακίνητη τροχαλία που δεν έχει βάρος και έχει ακτίνα α. ΄Ενα τρίτο υλικό σημείο Σ με μάζα m είναι δεμένο με το νήμα. Αρχικά το Σ βρίσκεται στο ανώτατο σημείο της τροχαλίας και το σύστημα ξεκινάει από την ηρεμία. Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του νήματος όσο το Σ παραμένει πάνω στην τροχαλία και να βρεθεί σε ποια θέση το Σ εγκαταλείπει την τροχαλία.

Λύση



$A\Sigma_2 = Z_2$
$B\Sigma_1 = Z_1$

Επειδή το νήμα δεν είναι εκτατό, θα είναι $z_1 + z_2 =$ σταθ. Επίσης είναι $\dot{z}_1 = \alpha\dot{\vartheta}$. Έστω T_1 και T_2 οι δυνάμεις που ασκεί το νήμα στα Σ_1 και Σ_2. Παίρνοντας υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε ότι οι Δ.Ε της κίνησης των Σ_1, Σ_2 γίνονται

$$m_1\ddot{z}_1 = m_1\alpha\ddot{\vartheta} = m_1 g - T_1 \tag{1}$$

$$m_2\ddot{z}_2 = -m_2\ddot{z}_1 = -m_2\alpha\ddot{\vartheta} = m_2 g - T_2 \tag{2}$$

Στο Σ ενεργεί, εκτός από το βάρος του, η αντίδραση R της τροχαλίας που έχει ακτινική διεύθυνση και οι τάσεις T_1 και T_2 που έχουν εφαπτομενική διεύθυνση. Επομένως η συνολική δύναμη που ενεργεί στο Σ είναι

$$\mathbf{F} = R\mathbf{e}_r - T_2\mathbf{e}_\vartheta + T_1\mathbf{e}_\vartheta - mg\,\text{συν}\vartheta\,\mathbf{e}_r + mg\,\text{ημ}\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta \tag{3}$$

και η επιτάχυνση του Σ είναι

$$\boldsymbol{\gamma} = \alpha\ddot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta - \alpha\dot{\vartheta}^2\mathbf{e}_r \tag{4}$$

Η Δ.Ε της κίνησης του Σ είναι $m\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{F}$. Προβάλλοντας την εξίσωση αυτή κατά τις διευθύνσεις $\mathbf{e}_\vartheta$ και $\mathbf{e}_r$ και παίρνοντας υπόψη τις (3), (4) βρίσκουμε

$$m\alpha\ddot{\vartheta} = T_1 - T_2 + mg\eta\mu\vartheta \tag{5}$$

$$-m\alpha\dot{\vartheta}^2 = R - mg\sigma\upsilon\nu\vartheta \tag{6}$$

Απαλοίφοντας τις T_1, T_2 από τις (1), (2), (5), βρίσκουμε

$$\alpha\ddot{\vartheta} = M^{-1}(m\eta\mu\vartheta + m_1 - m_2)g \tag{7}$$

όπου $M = m_1 + m_2 + m$.

Η (7) λέγει ότι η επιτάχυνση $\alpha\ddot{\vartheta}$ του νήματος είναι σταθερή. Ολοκληρώνοντας την (7) και παίρνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες $t = 0$, $\vartheta = \dot{\vartheta} = 0$, βρίσκουμε

$$2M^{-1}g[m(1 - \sigma\upsilon\nu\vartheta) + (m_1 - m_2)\vartheta] = \alpha\dot{\vartheta}^2 \tag{8}$$

Η (8) καθορίζει την ταχύτητα $\alpha\dot{\vartheta}$ του νήματος.

Από τις (6) και (8) προκύπτει ότι η αντίδραση R είναι

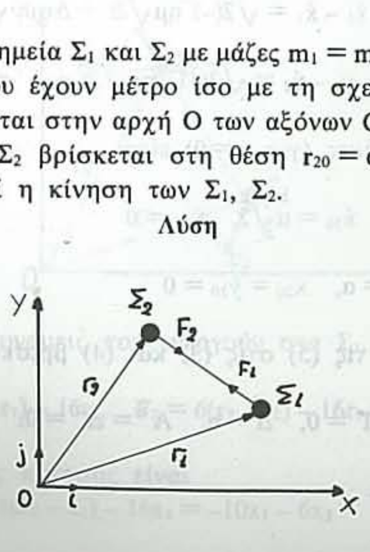
$$R = mg\sigma\upsilon\nu\vartheta - 2M^{-1}g[m(1 - \sigma\upsilon\nu\vartheta) + (m_1 - m_2)\vartheta] \tag{9}$$

Το Σ θα εγκαταλείψει την τροχαλία σε εκείνη τη θέση ϑ για την οποία είναι $R = 0$. Σύμφωνα με την (9), η θέση αυτή ικανοποιεί την εξίσωση

$$(2m + M)\sigma\upsilon\nu\vartheta - 2(m_1 - m_2)\vartheta - 2m = 0$$

13) Δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = m_2 = 1$ έλκονται μεταξύ τους με δυνάμεις που έχουν μέτρο ίσο με τη σχετική απόστασή τους. Αρχικά το Σ_1 βρίσκεται στην αρχή Ο των αξόνων Oxy και έχει ταχύτητα $\upsilon_{10} = \alpha\sqrt{2}i$ ενώ το Σ_2 βρίσκεται στη θέση $r_{20} = \alpha j$ και έχει μηδενική ταχύτητα. Να βρεθεί η κίνηση των Σ_1, Σ_2.

Λύση



Οι δυνάμεις που ενεργούν στα Σ_1 και Σ_2 είναι αντίστοιχα $\mathbf{F}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ και $\mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Άρα οι Δ.Ε της κίνησης είναι

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 = x_2 - x_1, \qquad \ddot{x}_2 = x_1 - x_2 \\ &\ddot{y}_1 = y_2 - y_1, \qquad \ddot{y}_2 = y_1 - y_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Από τις (1) με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = -2(x_1 - x_2) \\ &\frac{d^2}{dt^2}(y_1 + y_2) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}(y_1 - y_2) = -2(y_1 - y_2) \end{aligned} \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας τις (2) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = At + B, \quad x_1 - x_2 = \Gamma\sigma\upsilon\nu\sqrt{2}t + \Delta\eta\mu\sqrt{2}t \\ &y_1 + y_2 = A't + B', \quad y_1 - y_2 = \Gamma'\sigma\upsilon\nu\sqrt{2t} + \Delta'\eta\mu\sqrt{2t} \end{aligned} \tag{3}$$

όπου οι σταθερές Α, Β, Γ, Δ, Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ θα υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες. Για το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε τις (3) και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = A, \quad \dot{x}_1 - \dot{x}_1 = \sqrt{2}(-\Gamma\eta\mu\sqrt{2}t + \Delta\sigma\upsilon\nu\sqrt{2}t) \\ &\dot{y}_1 + \dot{y}_2 = A', \quad \dot{y}_1 - \dot{y}_2 = \sqrt{2}(-\Gamma'\eta\mu\sqrt{2}t + \Delta'\sigma\upsilon\nu\sqrt{2}t) \end{aligned} \tag{4}$$

Οι αρχικές συνθήκες (για $t = 0$) είναι

$$\begin{aligned} &x_{10} = y_{10} = 0, \quad \dot{x}_{10} = \alpha\sqrt{2}, \quad \dot{y}_{10} = 0 \\ &x_{20} = 0, \quad y_{20} = \alpha, \quad \dot{x}_{20} = \dot{y}_{20} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας τις (5) στις (3) και (4) βρίσκουμε

$$A = \alpha\sqrt{2}, \quad B = \Gamma = 0, \quad \Delta = \alpha, \quad A' = \Delta' = 0, \quad B' = \alpha, \quad \Gamma' = -\alpha$$

οπότε οι (3) γίνονται

$$x_1 + x_2 = \alpha\sqrt{2}t, \quad x_1 - x_2 = \alpha\eta\mu\sqrt{2}t$$
$$y_1 + y_2 = \alpha, \quad y_1 - y_2 = -\alpha\sigma\upsilon\nu\sqrt{2}t \tag{6}$$

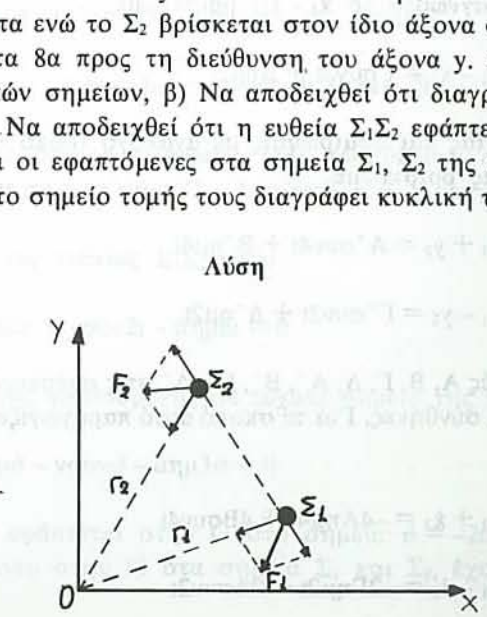
Από τις (6) προκύπτει ότι

$$x_1 = \alpha(\sqrt{2}t + \eta\mu\sqrt{2}t)/2, \quad x_2 = \alpha(\sqrt{2}t - \eta\mu\sqrt{2}t)/2$$

$$y_1 = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\sqrt{2}t)/2, \quad y_2 = \alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\sqrt{2}t)/2$$

14) Δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = m_2 = 1$ κινούνται πάνω στο επίπεδο Oxy απωθώντας το ένα το άλλο με δύναμη ίση με 6r όπου r είναι η σχετική απόστασή τους. Επιπλέον, το κάθε υλικό σημείο έλκεται από το O με δύναμη ίση με 16 φορές την απόστασή του από το O. Αρχικά το Σ_1 βρίσκεται πάνω στον άξονα x σε απόσταση 3α από το O και έχει μηδενική ταχύτητα ενώ το Σ_2 βρίσκεται στον ίδιο άξονα σε απόσταση -α και έχει ταχύτητα 8α προς τη διεύθυνση του άξονα y. α) Να βρεθεί η κίνηση των υλικών σημείων, β) Να αποδειχθεί ότι διαγράφουν την ίδια τροχιά G και γ) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $\Sigma_1\Sigma_2$ εφάπτεται πάντα στην τροχιά G και ότι οι εφαπτόμενες στα σημεία Σ_1, Σ_2 της G είναι κάθετες μεταξύ τους ενώ το σημείο τομής τους διαγράφει κυκλική τροχιά με ομαλή κίνηση.

Λύση



Οι συνολικές δυνάμεις που ενεργούν στα Σ_1, Σ_2 είναι αντίστοιχα

$$\mathbf{F}_1 = -6(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - 16\mathbf{r}_1, \quad \mathbf{F}_2 = 6(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - 16\mathbf{r}_2$$

Άρα οι Δ.Ε της κίνησης είναι

$$\ddot{x}_1 = -6(x_2 - x_1) - 16x_1 = -10x_1 - 6x_2 \tag{1}$$

$$\ddot{y}_1 = 6(y_2 - y_1) - 16y_1 = -10y_1 - 6y_2 \quad (2)$$

$$\ddot{x}_2 = 6(x_2 - x_1) - 16x_2 = -10x_2 - 6x_1 \quad (3)$$

$$\ddot{y}_2 = 6(y_2 - y_1) - 16y_2 = -10y_2 - 6y_1 \quad (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (3) βρίσκουμε

$$d^2(x_1 + x_2)/dt^2 = -16(x_1 + x_2)$$

Η γενική λύση αυτής της Δ.Ε, με άγνωστο το $x_1 + x_2$, είναι

$$x_1 + x_2 = Aσυν4t + Bημ4t \quad (5)$$

Αφαιρώντας την (3) από την (1) και ολοκληρώνοντας τη Δ.Ε που προκύπτει (με άγνωστο το $x_1 - x_2$) βρίσκουμε

$$x_1 - x_2 = Γσυν2t + Δημ2t \quad (6)$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας με ανάλογο τρόπο τις (2) και (4) και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε

$$y_1 + y_2 = A'συν4t + B'ημ4t \quad (7)$$

$$y_1 - y_2 = Γ'συν2t + Δ'ημ2t \quad (8)$$

όπου οι σταθερές Α, Β, Γ, Δ, Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ στις σχέσεις (5)-(8) θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες. Για το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε τις (5)-(8) και βρίσκουμε

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 &= -4Aημ4t + 4Bσυν4t \\ \dot{x}_1 - \dot{x}_2 &= -2Γημ2t + 2Δσυν2t \\ \dot{y}_1 + \dot{y}_2 &= -4A'ημ4t + 4B'συν4t \\ \dot{y}_1 - \dot{y}_2 &= -2Γ'ημ2t + 2Δ'συν2t \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι (για $t = 0$)

$$x_{10} = 3\alpha, \quad y_{10} = 0, \quad \dot{x}_{10} = \dot{y}_{10} = 0$$

$$x_{20} = -\alpha, \quad y_{20} = 0, \; \dot{x}_{20} = 0, \quad \dot{y}_{20} = 8\alpha \tag{10}$$

Αντικαθιστώντας τις (10) στις (5)-(9) βρίσκουμε ότι

$$A = 2\alpha, \quad B = 0, \quad \Gamma = 4\alpha, \quad \Delta = 0$$

$$A' = 0, \quad B' = 2\alpha, \quad \Gamma' = 0, \quad \Delta' = -4\alpha \tag{11}$$

Αντικαθιστώντας τις (11) στις (5)-(8) και λύνοντας ως προς x_1, x_2, y_1, y_2 βρίσκουμε

$$x_1 = \alpha\sigma\upsilon\nu 4t + 2\alpha\sigma\upsilon\nu 2t, \quad y_1 = \alpha\eta\mu 4t - 2\alpha\eta\mu 2t \tag{12}$$

$$x_2 = \alpha\sigma\upsilon\nu 4t - 2\alpha\sigma\upsilon\nu 2t, \quad y_2 = \alpha\eta\mu 4t + 2\alpha\eta\mu 2t \tag{13}$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (13) προκύπτουν από τις (12) αν αντικαταστήσουμε το t με $t + \pi/2$. Άρα τα Σ_1 και Σ_2 διαγράφουν την ίδια τροχιά G.

Η εξίσωση της ευθείας $\Sigma_1\Sigma_2$ είναι

$$x\eta\mu 2t + y\sigma\upsilon\nu 2t - \alpha\eta\mu 6t = 0$$

ενώ η εξίσωση της εφαπτόμενης σε τυχαίο σημείο της τροχιάς G είναι

$$x\eta\mu\vartheta - y\sigma\upsilon\nu\vartheta - \alpha\eta\mu 3\vartheta = 0$$

Άρα η $\Sigma_1\Sigma_2$ εφάπτεται στην G στο σημείο $\vartheta = -2t$.

Οι εφαπτόμενες στην G στα σημεία Σ_1 και Σ_2, έχουν, αντίστοιχα, εξισώσεις

$$x\eta\mu t - y\sigma\upsilon\nu t - \alpha\eta\mu 3t = 0$$

$$x\sigma\upsilon\nu t + y\eta\mu t + \alpha\sigma\upsilon\nu 3t = 0$$

Επομένως οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες μεταξύ τους. Το σημείο τομής τους έχει συντεταγμένες

$$x = -\alpha\sigma\upsilon\nu 4t, \quad y = -\alpha\eta\mu 4t$$

δηλ. κινείται πάνω στην περιφέρεια $x^2 + y^2 = \alpha^2$ με γωνιακή ταχύτητα ίση με 4.

β) Μεταβλητή μάζα

1) Κατά την κατακόρυφη πτώση μιας σφαιρικής σταγόνας μέσα στην ατμόσφαιρα, η μάζα της αυξάνεται με ρυθμό ανάλογο προς την επιφάνειά της. Να βρεθεί η κίνησή της.

Λύση

Έστω m η μάζα και r η ακτίνα της σταγόνας σε κάποια στιγμή t. Θα είναι

$$m = 4\pi\rho r^3/3, \quad dm/dt = k4\pi r^2 \tag{1}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα της σταγόνας και k είναι θετική σταθερή. Από τις (1) προκύπτει ότι

$$dm/dt = 4\pi\rho r^2 dr/dt = 4\pi k r^2 \quad \text{ή} \quad dr/dt = k$$

Άρα

$$r = kt + r_0 \tag{2}$$

όπου r_0 είναι η αρχική τιμή της ακτίνας.

Η Δ.Ε της κίνησης της σταγόνας είναι

$$m d\upsilon/dt = mg - \upsilon dm/dt \tag{3}$$

Παίρνοντας υπόψη τις (1), (2) η (3) γίνεται

$$\frac{d\upsilon}{dt} + \frac{3k\upsilon}{r_0 + kt} = g \tag{4}$$

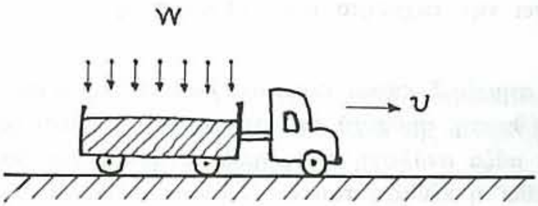
Αν για $t = 0$ είναι $\upsilon = 0$, η λύση της γραμμικής Δ.Ε (4) είναι

$$\upsilon = \frac{dz}{dt} = \frac{g}{4k}\left[r_0 + kt - \frac{r_0^4}{(r_0 + kt)^3}\right] \tag{5}$$

Ολοκληρώνοντας την (5) βρίσκουμε το ύψος z ως συνάρτηση του χρόνου t.

2) Αυτοκίνητο έχει ανοικτή καρότσα και κινείται με σβυσμένη μηχανή μέσα στη βροχή η οποία πέφτει με σταθερό ρυθμό k γεμίζοντας την καρότσα. Να βρεθεί η επίδραση που έχει η βροχή στην κίνηση του αυτοκινήτου. Να μελετηθεί και η περίπτωση που η καρότσα έχει στο πάτωμά της μια τρύπα από την οποία φεύγει, με σταθερό ρυθμό μ, μέρος του νερού που είναι μέσα στην καρότσα.

Λύση



α) Η Δ.Ε της κίνησης (του κέντρου μάζας) του αυτοκινήτου είναι

$$m\,d\upsilon/dt = (w - \upsilon)dm/dt \tag{1}$$

όπου υ είναι η ταχύτητα του αυτοκινήτου, w είναι η ταχύτητα της βροχής και $dm/dt = k > 0$ ή $m = kt + m_0$.

Προβάλλοντας την (1) κατά την οριζόντια διεύθυνση και παίρνοντας υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε

$$d\upsilon/\upsilon = -kdt/(m_0 + kt) \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας την (2) βρίσκουμε

$$\upsilon = dx/dt = m_0\upsilon_0/(m_0 + kt) \tag{3}$$

Ολοκληρώνοντας την (3) βρίσκουμε τη θέση x ως συνάρτηση του t.

β) Στην περίπτωση που έχουμε διαρροή με ρυθμό μ, η Δ.Ε της κίνησης είναι

$$md\upsilon/dt = k(w - \upsilon) - \mu(w' - \upsilon) \tag{4}$$

Αλλά η απόλυτη ταχύτητα w′ του νερού που διαρρέει είναι ίση με την ταχύτητα υ του αυτοκινήτου. Επίσης, είναι $dm/dt = k - \mu$ ή $m = m_0 + (k - \mu)t$. Προβάλλοντας την (4) κατά την οριζόντια διεύθυνση και παίρνοντας υπόψη τα προηγούμενα, βρίσκουμε

$$d\upsilon/\upsilon = -k\,dt/[m_0 + (k - \mu)t] \tag{5}$$

Ολοκληρώνοντας την (5) βρίσκουμε

$$\ln(\upsilon_0/\upsilon) = k(k - \mu)^{-1}\ln[1 + (k - \mu)t/m_0] \tag{6}$$

Η (6) δίνει την ταχύτητα υ ως συνάρτηση του t.

3) Υλικό σημείο Σ καθώς κινείται ελεύθερα πάνω στον άξονα x προς τη θετική διεύθυνση, συναντά στο σημείο $x = 0$ ένα υλικό μέσο από το οποίο παίρνει μάζα ανάλογη προς το διάστημα x που διανύει μέσα στο μέσο. Να βρεθεί η κίνηση του Σ.

Λύση

Η μάζα του Σ σε απόσταση x (> 0) είναι ίση με $m = m_0 + kx$ όπου m_0 είναι η μάζα του πριν μπει στο υλικό μέσο. Επειδή στο Σ δεν ενεργεί καμιά δοσμένη δύναμη F και η απόλυτη ταχύτητα w της μάζας που προστίθεται στο Σ είναι μηδενική, η Δ.Ε της κίνησης γράφεται με τη μορφή

$$d(m\upsilon)/dt = F = 0 \tag{1}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) βρίσκουμε

$$m\upsilon = m_0\upsilon_0 \quad \text{ή} \quad (m_0 + kx)dx/dt = m_0\upsilon_0 \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας την (2) βρίσκουμε

$$kx^2/2 + m_0x^2 - m_0\upsilon_0 t = 0$$

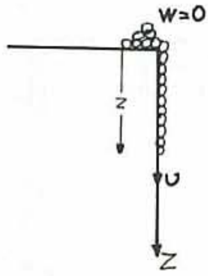
(όπου για $t = 0$ είναι $x = 0$ και $\upsilon = \upsilon_0$).

Άρα

$$x = -\frac{m_0}{k} + \sqrt{\left(\frac{m_0}{k}\right)^2 + \frac{2m_0\upsilon_0 t}{k}}$$

4) Μια ομογενής αλυσίδα είναι τυλιγμένη και τοποθετημένη στην άκρη ενός τραπεζιού έτσι ώστε ένα τμήμα της να κρεμιέται ακίνητο. Αν το τμήμα αυτό αφεθεί ελεύθερο, η αλυσίδα αρχίζει να ξετυλίγεται καθώς το τμήμα πέφτει. Να βρεθεί η κίνηση της αλυσίδας.

Λύση



Επειδή η απόλυτη ταχύτητα w της μάζας που προστίθεται στο τμήμα της αλυσίδας που πέφτει είναι μηδενική, η Δ.Ε της κίνησης του τμήματος αυτού μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$d(m\upsilon)/dt = mg \tag{1}$$

Αν λ είναι η γραμμική πυκνότητα της αλυσίδας, η μάζα του τμήματος που πέφτει είναι ίση με $m = \lambda z$, οπότε η (1) γίνεται

$$d(\lambda z\upsilon)/dt = \lambda zg \quad \text{ή} \quad \upsilon^2 + zd\upsilon/dt = zg \tag{2}$$

Αλλά $d\upsilon/dt = (d\upsilon/dz)(dz/dt) = \upsilon d\upsilon/dz = 2^{-1}d(\upsilon^2)/dz$. Άρα η (2) γίνεται

$$\frac{1}{2}\,\frac{d(\upsilon^2)}{dz} + \frac{1}{z}\,\upsilon^2 = g \tag{3}$$

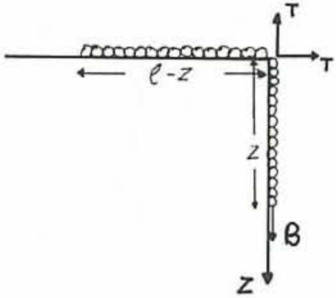
Ολοκληρώνοντας τη γραμμική Δ.Ε (3) και παίρνοντας υπόψη ότι για $t = 0$ είναι $z = z_0$, $\dot{z} = 0$, βρίσκουμε τελικά

$$\upsilon = dz/dt = z^{-1}\,\sqrt{2g(z^3 - z_0^3)/3} \tag{4}$$

Ολοκληρώνοντας την (4) βρίσκουμε το μήκος z του τμήματος που πέφτει ως συνάρτηση του χρόνου.

5) Μια ομογενής αλυσίδα με μήκος l και γραμμική πυκνότητα λ είναι τοποθετημένη σε λείο τραπέζι όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Βρείτε την κίνησή της αν για $t = 0$ είναι $z = z_0$ και $\dot{z} = 0$.

Λύση



Πρώτος τρόπος

Αν εξετάσουμε την κίνηση του οριζόντιου και του κατακόρυφου τμήματος της αλυσίδας ξεχωριστά, τότε έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα κίνησης με μεταβλητή μάζα. Όσο ελαττώνεται η μάζα του οριζόντιου τμήματος, τόσο αυξάνεται η μάζα του κατακόρυφου. Επειδή όλη η αλυσίδα κινείται με την ίδια ταχύτητα υ, η σχετική ταχύτητα **u** της μάζας που προστίθεται ή αφαιρείται είναι ίση με μηδέν. Άρα η Δ.Ε της κίνησης καθενός από τα τμήματα μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$m\,d\upsilon/dt = F \tag{1}$$

όπου m και F είναι η μάζα και η δύναμη που ενεργεί στο τμήμα.

Για το οριζόντιο τμήμα είναι $m = \lambda(l - z)$, $F = T$ και για το κατακόρυφο είναι $m = \lambda z$, $F = B - T = \lambda gz - T$, όπου T είναι η τάση T της αλυσίδας όπως φαίνεται στο σχήμα. Άρα η (1) γίνεται

$$\lambda(l - z)d^2z/dt^2 = T, \quad \lambda z d^2z/dt^2 = \lambda gz - T \tag{2}$$

Απαλοίφοντας την τάση T από τις (2) βρίσκουμε

$$d^2z/dt^2 = \omega^2 z \qquad (\omega^2 = g/l) \tag{3}$$

Η γενική λύση της γραμμικής Δ.Ε (3) είναι

$$z = c_2e^{\omega t} + c_2e^{-\omega t} \tag{4}$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες. Για το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε την (4) και βρίσκουμε την ταχύτητα

$$\upsilon = dz/dt = \omega c_1 e^{\omega t} - \omega c_2 e^{-\omega t} \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες $t = 0$, $z = z_0$, $\upsilon = 0$, στις (4) και (5) βρίσκουμε

$$z_0 = c_1 + c_2, \quad 0 = \omega(c_1 - c_2) \Rightarrow c_1 = c_2 = z_0/2$$

Επομένως η (4) γίνεται

$$z = z_0 \cosh(\omega t)$$

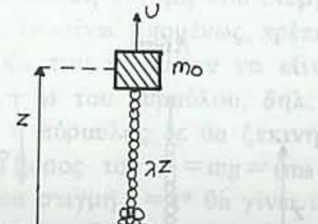
Δεύτερος τρόπος: Αντί να εξετάσουμε την κίνηση κάθε τμήματος ξεχωριστά, εξετάζουμε ολόκληρη την αλυσίδα. Η αλυσίδα κινείται με ταχύτητα $\upsilon = dz/dt$ και έχει σταθερή μάζα $m_0 = \lambda l$. Αυτό που δεν είναι σταθερό είναι η δύναμη που την επιταχύνει και που είναι ίση με το βάρος $B = g\lambda z$ του κατακόρυφου τμήματος. Άρα η Δ.Ε της κίνησης της αλυσίδας είναι

$$d(m_0\upsilon)/dt = g\lambda z$$

Η εξίσωση αυτή είναι ίδια με την εξίσωση (3).

6) Ένα σώμα από το οποίο κρέμεται μια ομογενής αλυσίδα εκτοξεύεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα υ_0. Η μάζα του σώματος είναι m_0 και η γραμμική πυκνότητα της αλυσίδας είναι λ. Να βρεθεί η κίνηση.

Λύση



Η μάζα του συστήματος σε τυχαία στιγμή είναι $m = m_0 + \lambda z$. Το σύστημα κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα $\upsilon = dz/dt$ με την επίδραση του βάρους του $B = -mg$. Επειδή η απόλυτη ταχύτητα της μάζας που προστίθεται στο σύστημα είναι μηδενική (ο σωρός της αλυσίδας είναι ακίνητος στο έδαφος), η Δ.Ε της κίνησης μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$d(m\upsilon)/dt = -mg \quad \text{ή} \quad md\upsilon/dt + \lambda\upsilon^2 + mg = 0 \tag{1}$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $d\upsilon/dt = (d\upsilon/dz)(dz/dt) = \upsilon d\upsilon/dz = 2^{-1}d(\upsilon^2)/dz$, η (1) γίνεται

$$\frac{d(\upsilon^2)}{dz} + \left(\frac{2\lambda}{m_0+\lambda z}\right)\upsilon^2 + 2g = 0 \tag{2}$$

Η γενική λύση αυτής της γραμμικής (ως προς υ^2) Δ.Ε είναι

$$\upsilon^2 = (m_0 + \lambda z)^{-2}\left[c - \frac{2g}{3\lambda}(m_0 + \lambda z)^3\right] \tag{3}$$

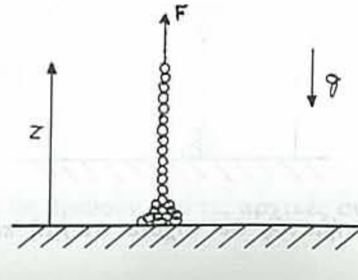
όπου η σταθερή c θα βρεθεί από τις αρχικές συνθήκες. Για $t = 0$ είναι $z = 0$, $\upsilon = \upsilon_0$. Άρα η (3) δίνει

$$c = m_0^2\upsilon_0^2 + 2gm_0^3/3\lambda \tag{4}$$

Οι εξισώσεις (3), (4) δίνουν την ταχύτητα ως συνάρτηση της θέσης. Από την ολοκλήρωσή τους θα βρεθεί η θέση z ως συνάρτηση του χρόνου.

7) Μια ομογενής αλυσίδα είναι τυλιγμένη σαν κουβάρι και ηρεμεί πάνω σε ένα τραπέζι. Ένας άνθρωπος πιάνει το ένα άκρο της και το σηκώνει κατακόρυφα με ταχύτητα $\upsilon(t)$. Να βρεθεί η δύναμη F που ασκεί ο άνθρωπος ως συνάρτηση του μήκους z του υψωμένου τμήματος της αλυσίδας.

Λύση



Το τμήμα της αλυσίδας που κινείται έχει μάζα $m = \lambda z$, όπου λ είναι η γραμμική πυκνότητά της. Η συνολική δύναμη που ενεργεί στο τμήμα αυτό είναι $F - mg$. Επειδή η απόλυτη ταχύτητα w της μάζας που προστίθεται στο τμήμα είναι μηδενική (γιατί προέρχεται από το ακίνητο κουβάρι της αλυσίδας), η Δ.Ε της κίνησης γίνεται

$$m \frac{d\upsilon}{dt} = F - mg - \upsilon \frac{dm}{dt} \qquad (1)$$

Επειδή $m = \lambda z$ και $d\upsilon/dt = \gamma =$ επιτάχυνση, η (1) δίνει

$$F = \lambda(z\gamma + \upsilon^2 + gz)$$

8) Πύραυλος είναι ακίνητος στην επιφάνεια της Γης. Τα καύσιμά του έχουν μάζα m_{k_0} και ο υπόλοιπος πύραυλος έχει μάζα M. Κάποια στιγμή, αρχίζει η ανάφλεξη των καυσίμων. Δεχόμαστε ότι το καύσιμο καίγεται με σταθερό ρυθμό k και ότι τα αέρια της καύσης εκτοξεύονται με σταθερή ταχύτητα u σχετικά με τον πύραυλο. Κάτω από ποιες προϋποθέσεις ο πύραυλος θα αρχίσει να ανυψώνεται τη στιγμή που αρχίζει η ανάφλεξη; Όταν συμβαίνει αυτό, να βρεθεί η κίνηση του πυραύλου καθώς και η ταχύτητά του τη στιγμή που θα εξαντληθούν όλα τα καύσιμα. Να αποδειχθεί ότι, όταν η πτήση γίνεται στο διάστημα, η ταχύτητα αυτή είναι ανεξάρτητη από τον τρόπο με τον οποίο καίγονται τα καύσιμα.

Λύση

Η Δ.Ε της κίνησης του πυραύλου είναι

$$m d\upsilon/dt = mg + u dm/dt \qquad (1)$$

Επειδή $dm/dt =$ σταθ. $= -k$ $(k > 0)$, θα είναι $m = m_0 - kt$.

Για να αρχίσει να ανυψώνεται ο πύραυλος τη στιγμή $t = 0$ που αρχίζει η ανάφλεξη, πρέπει η συνολική δύναμη που ενεργεί σ' αυτόν τη στιγμή αυτή να διευθύνεται προς τα πάνω. Επομένως, πρέπει η σταθερή προωθητική δύναμη $|u dm/dt| = ku$ των καυσίμων να είναι μεγαλύτερη από το αρχικό βάρος $m_0 = m_{ok} + M$ του πυραύλου, δηλ. $ku > m_0 g$.

Αν είναι $ku < m_0 g$, ο πύραυλος δε θα ξεκινήσει αμέσως. Καθώς θα εκτοξεύει τα αέρια, το βάρος του $B = mg = (m_0 - kt)g$ θα ελαττώνεται συνεχώς ώσπου σε κάποια στιγμή $t = t^*$ θα γίνει ίσο με την προωθητική δύναμη, δηλ. $(m_0 - kt^*)g = ku$. Τότε ακριβώς θα αρχίσει να ανυψώνεται. Βέβαια, αν η προωθητική δύναμη ku είναι μικρότερη από το ελάχιστο βάρος Mg του πυραύλου, τότε ο πύραυλος δε θα μπορέσει να ξεκινήσει έστω και αν εξαντλήσει όλα τα καύσιμα.

σύστημα κινείται προς τα
βάρους του $B = -mg$. Ε
προστίθεται στο σύστημα
ακίνητος στο έδαφος), η

$$d(m\upsilon)/dt = -mg$$

Κάνοντας την αντικο
$= 2^{-1}d(\upsilon^2)/dz$, η (1) γίνετ

$$\frac{d(\upsilon^2)}{dz} + \Big(\frac{2}{m_0}$$

Η γενική λύση αυτή

$$\upsilon^2 = (m_0 +$$

όπου η σταθερή c θα βρ
$z = 0$, $\upsilon = \upsilon_0$. Άρα η (3

$$c = m_0^2\upsilon_0^2 +$$

Οι εξισώσεις (3), (4)
Από την ολοκλήρωσή του

7) Μια ομογενής αλ
πάνω σε ένα τραπέζι. Ε
σηκώνει κατακόρυφα με τ
άνθρωπος ως συνάρτηση
αλυσίδας.

Με τη βοήθεια των π

$$\frac{d\upsilon}{dt} = g - \frac{ku}{m_0 -}$$

Ολοκληρώνοντας την (

$$\upsilon = \frac{dz}{dt} = -u\ln\Big($$

Η (3) δίνει την ταχύτη
μέχρι τη στιγμή $t = \tau$ που θ
είναι $m(\tau) = M = M + m_{ko} -$
πυραύλου θα έχει αποκτήσει
είναι ίση με

$$\upsilon_{max} = \upsilon(\tau) = -$$

Παρατηρούμε ότι όταν η
υ_{max} εξαρτάται από το κλάσμ
μαζών των καυσίμων και του
των καυσίμων (δηλαδή από

Ολοκληρώνοντας την (3
$z = 0$ βρίσκουμε

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + u$$

Η (6) δίνει το ύψος του π
στιγμή $t = \tau$ που θα εξαντλη

9) Δυόροφος πύραυλος κ
που έχει μάζα m_φ. Το πρώτ
καύσιμα) M_1 και καύσιμα m_1,
και καύσιμα m_2, ο ρυθμός k τ
σχετική ταχύτητα u της εκτόξ
στάδια. Να μελετηθεί η κίνησ
το λόγο M_1/M_2 ώστε η ταχύ
εξαντληθούν όλα τα καύσιμα
συνολική μάζα $M = M_1 + M_2$

ροηγουμένων σχέσεων, η (1) γί

kt

2) βρίσκουμε

$$\left(1 - \frac{k}{m_0}\, t\right) - gt$$

τα του πυραύλου σε κάθε στιγ
α εξαντληθούν όλα τα καύσιμα
$k\tau$ ή $\tau = m_{ko}/k$. Τη στιγμή τ η
τη μέγιστη τιμή της που, σύμφω

$$u\ln\left(1 - \frac{m_{ko}}{m_0}\right) - \frac{g m_{ko}}{k}$$

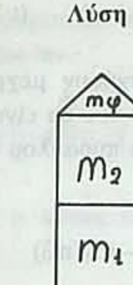
κίνηση γίνεται στο διάστημα (
α $m_{ko}/m_0 = (1 + M/m_{ko})^{-1}$, δηλ
πυραύλου και όχι από τον τρόπ
τον νόμο $dm/dt = f(t)$).
) και παίρνοντας υπόψη ότι γ
ε

$$t - u\left(t - \frac{m_0}{k}\right)\ln\left(1 - \frac{kt}{m_0}\right)$$

υραύλου σε κάθε στιγμή και ισ
ηθούν όλα τα καύσιμα.

ινείται στο διάστημα μεταφέρ
ο στάδιο έχει συνολική μάζ
το δεύτερο στάδιο έχει συνο
ης κατανάλωσης των καυσίμω
ευσης των αερίων είναι ίδια κ
η του πυραύλου. Πώς πρέπει
τητα που θα αποκτήσει ο π
να είναι μέγιστη, με την προϋ
παραμένει σταθερή;

Λύση



ο στάδιο της κίνησης αρχίζει τη στιγμή $t = 0$ που ο πύραυλος
ς και τελειώνει τη στιγμή $t = \tau_1$ που θα έχει καεί όλη η μάζα
ίμων του πρώτου ορόφου. Η συνολική μάζα του πυραύλου
$m(t) = M_1 + M_2 + m_\varphi - kt = m_0 - kt$ όπου $m_0 = M_1 + M_2 + m_\varphi$
ι. Σύμφωνα με τον τύπο (3) της προηγούμενης άσκησης, η
πυραύλου σε κάθε στιγμή $0 \leqslant t \leqslant \tau_1$ είναι ίση με (για $g = 0$)

$$\upsilon = \frac{dz}{dt} = -u\ln\left(1 - \frac{k}{m_0}\, t\right) \tag{1}$$

ιμα m_1 θα εξαντληθούν τη στιγμή τ_1 που θα είναι $m(\tau_1) = m_0 - m_1 =$
ηλ. τη στιγμή $\tau_1 = m_1/k$. Τότε η ταχύτητα του πυραύλου θα

$$\upsilon(\tau_1) = -u\ln(1 - m_1/m_0) \tag{2}$$

ητα αυτή είναι η αρχική ταχύτητα του δεύτερου σταδίου κατά
ει πέσει ο πρώτος όροφος και καίγονται τα καύσιμα m_2 του
όφου. Η αρχική μάζα του δεύτερου σταδίου είναι $m_0' = M_2 +$
μάζα σε τυχαία χρονική στιγμή $t(\geqslant \tau_1)$ είναι $m_0' - kt$. Επομένως
τον τύπο (2) της προηγούμενης άσκησης, η Δ.Ε της κίνησης
ερο στάδιο είναι (για $g = 0$)

$$d\upsilon/dt = -ku/(m_0' - kt) \qquad (t \geqslant \tau_1) \tag{3}$$

ρώνοντας την (3) και παίρνοντας υπόψη ότι για $t = \tau_1$ είναι
ίσκουμε ότι η ταχύτητα κατά το δεύτερο στάδιο είναι ίση με

$$\upsilon = \upsilon(\tau_1) - u\ln(1 - kt/m_0') \qquad (t \geqslant \tau_1) \tag{4}$$

Βέβαια, οι τύποι (3), (4) ισχύουν μέχρι τη στιγμή $t = \tau_2$ που θα εξαντληθούν τα καύσιμα m_2, δηλ. που θα είναι $m(\tau_2) = m_0' - m_2 = m_0' - k\tau_2$ ή $\tau_2 = m_2/k$. Τότε, η ταχύτητα του πυραύλου θα είναι, σύμφωνα με την (4), ίση με

$$\upsilon(\tau_2) = \upsilon(\tau_1) - u\ln(1 - m_2/m_0') \tag{5}$$

Παίρνοντας υπόψη την (2), η (5) γίνεται

$$\upsilon(\tau_2) = -u\left[\ln\left(1 - \frac{m_1}{m_0}\right) + \ln\left(1 - \frac{m_2}{m_0'}\right)\right] \tag{6}$$

Αν γράψουμε τις μάζες m_1 και m_2 των καυσίμων ως κλάσματα των συνολικών μαζών M_1 και M_2 των ορόφων, δηλ. $m_1 = \varepsilon M_1$, $m_2 = \varepsilon M_2$ $(0 < \varepsilon < 1)$ (υποθέτουμε ότι το κλάσμα m_i/M_i έχει την ίδια τιμή ε και για τους δυο ορόφους) και χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $M_1 = M - M_2$ ο τύπος (6) γίνεται

$$\upsilon(\tau_2) \equiv \upsilon_2 = -u\left\{\ln\left[1 - \frac{\varepsilon(M - M_2)}{M + m_\varphi}\right] + \ln\left[1 - \frac{\varepsilon M_2}{M_2 + m_\varphi}\right]\right\} \tag{7}$$

Έτσι, η υ_2 εκφράστηκε ως συνάρτηση του M_2 (το M θεωρείται δοσμένο). Αν θέλουμε λοιπόν να γίνει μέγιστη η υ_2 πρέπει το M_2 να επαληθεύει την εξίσωση $d\upsilon_2/dM_2 = 0$. Εκτελώντας την παραγώγιση της (7) ως προς M_2 και παίρνοντας υπόψη ότι είναι $\varepsilon \neq 1$ βρίσκουμε ότι το M_2 πρέπει να είναι ρίζα της εξίσωσης

$$M_2^2 + 2m_\varphi M_2 - m_\varphi M = 0 \tag{8}$$

Η εξίσωση αυτή έχει μια θετική και μια αρνητική ρίζα. Η αρνητική απορρίπτεται και η θετική είναι

$$M_2 = -m_\varphi + \sqrt{m_\varphi^2 + m_\varphi M}$$

ή

$$\frac{M_2}{M} = -\frac{m_\varphi}{M} + \left(\frac{m_\varphi}{M}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{m_\varphi}{M}\right)^{1/2} \tag{9}$$

Επειδή το φορτίο του πυραύλου είναι αρκετά μικρό, δηλ. $m_\varphi/M \equiv$ $\equiv \mu << 1$, ο τύπος (9) γράφεται

$$\frac{M_2}{M} = -\mu + \mu^{1/2}\left[1 + \frac{1}{2}\mu + ...\right] = -\mu + \mu^{1/2} + \frac{1}{2}\mu^{3/2} + ...$$

Σε πρώτη προσέγγιση, ο τύπος αυτός γίνεται

$$M_2/M \simeq \mu^{1/2} \tag{10}$$

π.χ. αν υποθέσουμε ότι $\mu = 1/100$, τότε από την (10) προκύπτει $M_2/M = 10$ ή $M_1/M_2 \simeq 9/1$, δηλ. ότι ο πρώτος όροφος πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερος από το δεύτερο.

10) Ένα αερόστατο ισορροπεί σε ύψος h. Σε κάποια στιγμή, η άμμος που έχει το αερόστατο αρχίζει να πέφτει με σταθερό ρυθμό. Να βρεθεί η κίνησή του.

Λύση

Αν m είναι η συνολική μάζα του αερόστατου σε κάποια στιγμή t, θα είναι $\dot{m} = \text{σταθ.} \equiv -k$ $(k > 0)$. Άρα $m = m_0 - kt = M + m_a - kt$, όπου m_a είναι η αρχική μάζα της άμμου και M η μάζα του αερόστατου χωρίς την άμμο. Επειδή η άμμος είναι ακίνητη μέσα στο αερόστατο, η ταχύτητα με την οποία πέφτει (σχετικά με το αερόστατο) είναι ίση με μηδέν. Γι' αυτό η Δ.Ε της κίνησης του αερόστατου είναι

$$m\,\frac{d\upsilon}{dt} = F = A - mg \tag{1}$$

όπου η (σταθερή) άνωση A είναι ίση με το αρχικό βάρος $m_0 g$ (αφού το αερόστατο αρχικά ισορροπούσε).

Άρα η (1) γίνεται τελικά

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{gkt}{m_0 - kt} \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας την (2) και παίρνοντας υπόψη ότι για $t = 0$ είναι $\upsilon = 0$ βρίσκουμε

$$\upsilon = \frac{dz}{dt} = -gt - \frac{m_0 g}{k}\ln\left(1 - \frac{kt}{m_0}\right) \tag{3}$$

Ολοκληρώνοντας την (3) και παίρνοντας υπόψη ότι για $t = 0$ είναι $z = h$ βρίσκουμε

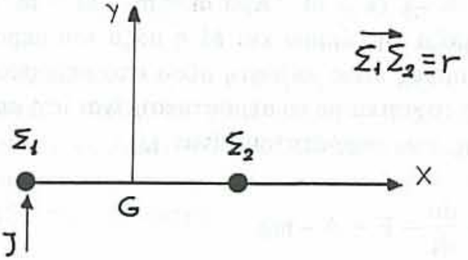
$$z = h - \frac{1}{2} gt^2 - \frac{m_0 g}{k} \left[\left(t - \frac{m_0}{k} \right) \ln\left(1 - \frac{kt}{m_0} \right) - t \right] \qquad (4)$$

Οι (3) και (4) δίνουν την ταχύτητα και το ύψος του αερόστατου σε κάθε στιγμή t και ισχύουν μέχρι τη στιγμή τ που θα έχει πέσει όλη η άμμος, δηλ. $m = 0 = m_0 - k\tau$ ή $\tau = m_0/k$.

γ) Ωστικές δυνάμεις

1) Δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 συνδέονται μεταξύ τους με ένα στερεό ραβδί που δεν έχει βάρος. Τα υλικά σημεία ηρεμούν πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Κάποια στιγμή, μια ώση J ενεργεί στο Σ_1 κάθετα προς το ραβδί και παράλληλα προς το τραπέζι. Να βρεθούν οι ταχύτητες που θα έχουν τα Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την ώση.

Λύση



Θα χρησιμοποιήσουμε τους νόμους μεταβολής της ορμής και της στροφορμής του συστήματος. Πριν από την ώση, τα Σ_1 και Σ_2 ηρεμούν. Γι' αυτό, η αρχική ορμή και στροφορμή του συστήματος είναι ίσες με μηδέν. Αν υ_1 και υ_2 είναι οι ταχύτητες των Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την ώση, η ορμή του συστήματος θα είναι ίση με $m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2$ και η στροφορμή του ως προς το Σ_2 θα είναι ίση με $r x m_1 \upsilon_1$. Άρα, οι μεταβολές της ορμής και της στροφορμής θα είναι ίσες με

$$\Delta \mathbf{p} = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2, \qquad \Delta L = r x m_1 \upsilon_1 \qquad (1)$$

Σύμφωνα με τους γνωστούς νόμους για την ορμή και τη στροφορμή, θα είναι

$$\Delta p = J, \qquad \Delta L = r \times J \tag{2}$$

Άρα,

$$\Delta p = m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 = J, \qquad \Delta L = r \times m_1 \upsilon_1 = r \times J \tag{3}$$

Από τις (3) προκύπτει ότι

$$r x m_1 \upsilon_1 = r \times J = r \times (m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2) \Rightarrow r x m_2 \upsilon_2 = 0$$

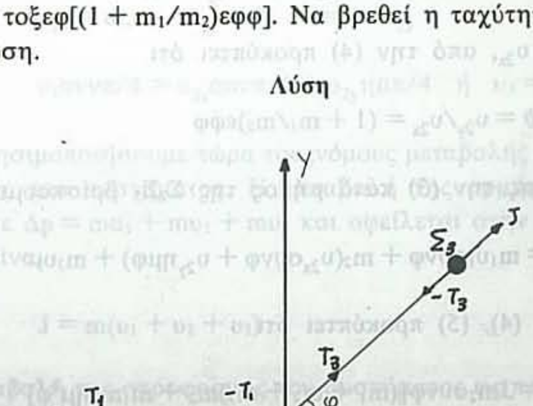
ή

$$\upsilon_2 = 0$$

Ώστε, το Σ_2 παραμένει ακίνητο και μετά την ώση. Για $\upsilon_2 = 0$, η (3) δίνει $\upsilon_1 = m_1^{-1} J$. Ώστε, το Σ_1 αποκτά ταχύτητα ίση με J/m κάθετη προς το ραβδί.

2) Τρία υλικά σημεία Σ_1, Σ_2, Σ_3 με μάζες m_1, m_2, m_3 βρίσκονται ακίνητα πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι και συνδέονται μεταξύ τους με μηεκτατά νήματα που είναι τεντωμένα. Η οξεία γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους τα νήματα $\Sigma_1\Sigma_2$ και $\Sigma_2\Sigma_3$ είναι ίση με φ. Κάποια στιγμή, μια ώση J ενεργεί στο Σ_3 κατά τη διεύθυνση $\Sigma_2\Sigma_3$. Να αποδειχθεί ότι το Σ_2 αρχίζει να κινείται προς μια διεύθυνση που σχηματίζει με την $\Sigma_1\Sigma_2$ γωνία ίση με $\vartheta =$ τοξεφ$[(1 + m_1/m_2)$εφφ$]$. Να βρεθεί η ταχύτητα του Σ_1 αμέσως μετά την ώση.

Λύση



Με την επίδραση της ώσης J τα νήματα τεντώνονται απότομα, δηλ. δημιουργούνται ωστικές τάσεις T_i στα νήματα που ακολουθούν το νόμο δράσης-αντίδρασης (βλέπε στο σχήμα). Έστω υ_1, υ_2, υ_3 οι ταχύτητες των Σ_1, Σ_2, Σ_3 αμέσως μετά την ώση. Η τάση T_1 μεταβάλλει την ορμή του Σ_1 κατά $m_1\upsilon_1$, η τάση $T_3 - T_1$ μεταβάλλει την ορμή του Σ_2 κατά $m_2\upsilon_2$ και η τάση $J - T_3$ την ορμή του Σ_3 κατά $m_3\upsilon_3$. Επομένως, ο νόμος μεταβολής της ορμής δίνει

$$m_1\upsilon_1 = T_1, \qquad m_2\upsilon_2 = T_3 - T_1, \qquad m_3\upsilon_3 = J - T_3 \tag{1}$$

Επιπλέον, επειδή τα νήματα είναι μη-εκτατά, οι προβολές των ταχυτήτων των Σ_1 και Σ_2 πάνω στο νήμα $\Sigma_1\Sigma_2$ πρέπει να είναι ίσες μεταξύ τους. Το ίδιο θα ισχύει και για τις προβολές των ταχυτήτων των Σ_2 και Σ_3 πάνω στο νήμα $\Sigma_2\Sigma_3$, δηλαδή θα είναι

$$\upsilon_1 = \upsilon_{2x}, \qquad \upsilon_{2x}\text{συν}\varphi + \upsilon_{2y}\text{ημ}\varphi = \upsilon_3 \tag{2}$$

Από τις (1) προκύπτει ότι

$$J = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 + m_3\upsilon_3 \tag{3}$$

Η (3) εκφράζει το γεγονός ότι η μεταβολή της ορμής όλου του συστήματος είναι ίση με τη συνολική εξωτερική ώση. Προβάλλοντας την (3) κάθετα προς την $\Sigma_2\Sigma_3$ βρίσκουμε

$$0 = m_1\upsilon_1\text{ημ}\varphi + m_2(\upsilon_{2x}\text{ημ}\varphi - \upsilon_{2y}\text{συν}\varphi) \tag{4}$$

Επειδή $\upsilon_1 = \upsilon_{2x}$, από την (4) προκύπτει ότι

$$\text{εφ}\vartheta = \upsilon_{2y}/\upsilon_{2x} = (1 + m_1/m_2)\text{εφ}\varphi$$

Προβάλλοντας την (3) κατά μήκος της $\Sigma_2\Sigma_3$ βρίσκουμε

$$J = m_1\upsilon_1\text{συν}\varphi + m_2(\upsilon_{2x}\text{συν}\varphi + \upsilon_{2y}\text{ημ}\varphi) + m_3\upsilon_3 \tag{5}$$

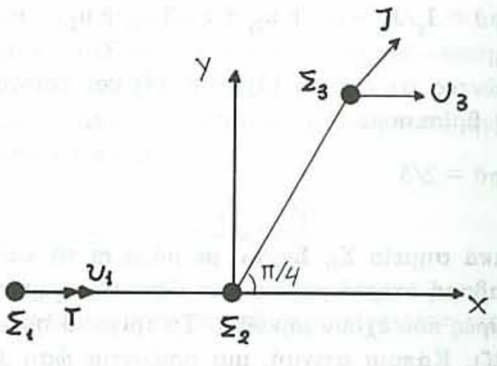
Από τις (2), (4), (5) προκύπτει ότι

$$\upsilon_1 = Jm_2\text{συν}\varphi[(m_1 + m_2 + m_3)m_2 + m_1m_3\text{ημ}^2\varphi]^{-1}$$

3) Τρία υλικά σημεία Σ_1, Σ_2, Σ_3, με μάζα m το καθένα, συνδέονται μεταξύ τους με μη-εκτατά νήματα $\Sigma_1\Sigma_2$ και $\Sigma_2\Sigma_3$. Τα υλικά σημεία ηρεμούν

πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι και τα νήματα είναι τεντωμένα σχηματίζοντας γωνία $\Sigma_1\hat{\Sigma}_2\Sigma_3 = 3\pi/4$. Κάποια στιγμή, μια οριζόντια ώση ενεργεί στο Σ_3 και του δίνει ταχύτητα παράλληλη προς την $\Sigma_1\Sigma_2$ (τα νήματα παραμένουν τεντωμένα). Να αποδειχθεί ότι η διεύθυνση της ώσης σχηματίζει γωνία $\vartheta = \text{τοξεφ}(2/5)$ με την $\Sigma_1\Sigma_2$.

Λύση



Έστω υ_1, υ_2, υ_3 οι ταχύτητες των Σ_1, Σ_2, Σ_3 αμέσως μετά την ώση **J**. Η υ_1 έχει τη διεύθυνση του νήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ γιατί οφείλεται στην ωστική τάση T του νήματος (βλέπε στο σχήμα, είναι $m\upsilon_1 = T$). Επειδή τα νήματα είναι μηεκτατά, οι προβολές των ταχυτήτων των Σ_1 και Σ_2 πάνω στην $\Sigma_1\Sigma_2$ είναι ίσες μεταξύ τους. Το ίδιο ισχύει και για τις προβολές των ταχυτήτων των Σ_2 και Σ_3 πάνω στην $\Sigma_2\Sigma_3$. Άρα,

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_1, \qquad \upsilon_{1y} = 0, \qquad \upsilon_1 = \upsilon_{2x}$$

και (1)

$$\upsilon_3 \sigma\upsilon\nu\pi/4 = \upsilon_{2x}\sigma\upsilon\nu\pi/4 + \upsilon_{2y}\eta\mu\pi/4 \quad \text{ή} \quad \upsilon_3 = \upsilon_{2x} + \upsilon_{2y}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τουςνόμους μεταβολής της ορμής και της στροφορμής του συστήματος. Η μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι ίση με $\Delta\mathbf{p} = m\upsilon_1 + m\upsilon_2 + m\upsilon_3$ και οφείλεται στην εξωτερική ώση **J**. Άρα θα είναι

$$\mathbf{J} = m(\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3) \tag{2}$$

Η μεταβολή της στροφορμής του συστήματος ως προς το Σ_3 είναι ίση με $\Delta\mathbf{L} = \Sigma_3\Sigma_1 \times m\upsilon_1 + \Sigma_3\Sigma_2 \times m\upsilon_2 = ma\upsilon_1\mathbf{k} - ma(\upsilon_{2x} - \upsilon_{2y})\mathbf{k} = ma(\upsilon_1 + \upsilon_{2x} - \upsilon_{2y})\mathbf{k}$ (όπου α είναι η απόσταση του Σ_3 από τους άξονες και **k** είναι διανυσματική μονάδα κάθετη στο επίπεδο xOy) και οφείλεται στη ροπή της ώσης J ως προς το Σ_3. Επειδή η ροπή αυτή είναι ίση με μηδέν, θα είναι

$$m\alpha(\upsilon_1 + \upsilon_{2x} - \upsilon_{2y})\mathbf{k} = 0 \quad \text{ή} \quad \upsilon_{2y} = \upsilon_1 + \upsilon_{2x} \tag{3}$$

Από την (2) προκύπτει ότι

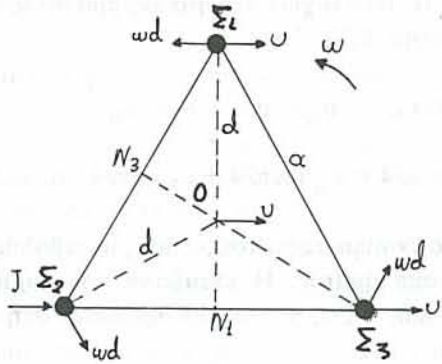
$$\varepsilon\varphi\vartheta = J_y/J_x = \upsilon_{1y} + \upsilon_{2y} + \upsilon_{3y}/(\upsilon_{1x} + \upsilon_{2x} + \upsilon_{3x}) \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας τις (1) και (3) στην (4) και παίρνοντας υπόψη ότι $\upsilon_{3x} = \upsilon_3$, $\upsilon_{3y} = 0$ βρίσκουμε

$$\varepsilon\varphi\vartheta = 2/5$$

4) Τρ΄ : υλικά σημεία Σ_1, Σ_2, Σ_3, με μάζα m το καθένα, συνδέονται μεταξύ τους με αβαρή στερεά ραβδιά έτσι ώστε να σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρές πού έχουν μήκος α. Το τρίγωνο ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Κάποια στιγμή, μια οριζόντια ώση J ενεργεί στο Σ_2 κατά τη διεύθυνση $\Sigma_2\Sigma_3$. Να αποδειχθεί ότι η γωνιακή ταχύτητα του τριγώνου αμέσως μετά την ώση είναι ίση με $\omega = J\sqrt{3}/6\alpha m$ και ότι η κινητική του ενέργεια είναι ίση με $T = 5J^2/24m$.

Λύση



Αν O είναι το κέντρο μάζας του συστήματος, θα είναι

$$O\Sigma_1 = O\Sigma_2 = O\Sigma_3 \equiv d = \alpha/\sqrt{3}$$

Αν υ είναι η ταχύτητα του O αμέσως μετά την ώση, η μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι $\Delta p = (3m)\upsilon$ και είναι ίση με την ώση J, δηλ.

$$3m\upsilon = J$$

Η κίνηση του συστήματος αμέσως μετά την ώση είναι συνισταμένη μιας μεταφορικής με ταχύτητα $\upsilon = J/3m$ κατά τη διεύθυνση της ώσης J και μιας περιστροφικής γύρω από το O με κάποια γωνιακή ταχύτητα ω. Έτσι, η ταχύτητα του κάθε υλικού σημείου είναι συνισταμένη της μεταφορικής ταχύτητας υ και της περιστροφικής ωd (βλέπε στο σχήμα).

Η μεταβολή της στροφορμής του συστήματος ως προς το Σ_2 είναι ίση με

$$\Delta L = m(\omega d - \upsilon)\Sigma_1 N_1 + m\omega d\Sigma_3 N_3 = m(2\omega d - \upsilon)\alpha\eta\mu 60^0$$

Η ΔL πρέπει να είναι ίση με μηδέν γιατί η ροπή της J ως προς το Σ_2 είναι μηδέν. Άρα θα είναι

$$\omega = \frac{\upsilon}{2d} = \frac{J}{3m} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\alpha} = \frac{J\sqrt{3}}{6\alpha m}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με

$$T = \frac{1}{2}\, m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\, m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}\, m\upsilon_3^2$$

όπου

$$\upsilon_1^2 = (\omega d - \upsilon)^2, \qquad \upsilon_2^2 = \upsilon_3^2 = \upsilon^2 + \omega^2 d^2 + 2\upsilon\omega d\sigma\upsilon\nu 60^0$$

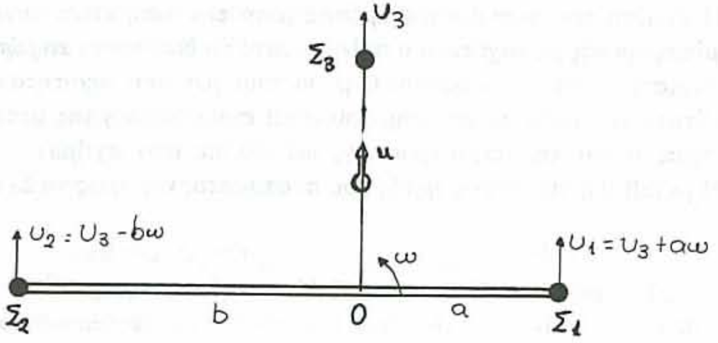
Παίρνοντας υπόψη και τις σχέσεις $\omega d = \upsilon/2 = J/6m$, $\upsilon = J/3m$ βρίσκουμε τελικά ότι

$$T = 5J^2/24m$$

5) Δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2, με μάζα m το καθένα, συνδέονται μεταξύ τους με ένα αβαρές στερεό ραβδί. Ένα τρίτο υλικό σημείο Σ_3 με μάζα m συνδέεται με ένα σημείο O του ραβδιού με ένα μη-εκτατό νήμα έτσι ώστε το $O\Sigma_3$ να είναι κάθετο στην $\Sigma_1\Sigma_2$. Το σύστημα ηρεμεί και το νήμα δεν είναι τεντωμένο. Κάποια στιγμή, στο Σ_3 δίνεται ταχύτητα u κάθετη στην $\Sigma_1\Sigma_2$. Να βρεθεί η ταχύτητα του Σ_3 καθώς και η γωνιακή ταχύτητα του ραβδιού αμέσως μετά από τη στιγμή που θα τεντωθεί το νήμα. Δίνεται ότι $O\Sigma_1 = \alpha$ και $O\Sigma_2 = b$.

Λύση

Έστω υ_1, υ_2, υ_3 οι ταχύτητες των Σ_1, Σ_2, Σ_3 αμέσως μετά το τέντωμα του νήματος. Επειδή οι ωστικές τάσεις που αναπτύσσονται μόλις τεντωθεί το



νήμα έχουν τη διεύθυνση του νήματος, δεν προκαλούν μεταβολή στη διεύθυνση της ταχύτητας **u** του Σ_3. Γιαυτό, η υ_3 είναι (όπως η **u**) κάθετη στην $\Sigma_1\Sigma_2$. Η κίνηση του ραβδιού μπορεί να θεωρηθεί ως συνισταμένη μιας μεταφορικής με ταχύτητα υ_3 και μιας περιστροφικής γύρω από το O με γωνιακή ταχύτητα ω. Επειδή οι ταχύτητες των Σ_1, Σ_2 που οφείλονται στην περιστροφή ω είναι κάθετες στην $\Sigma_1\Sigma_2$ (όπως και η υ_3), οι συνολικές ταχύτητες υ_1 του Σ_1 και υ_2 του Σ_2 θα είναι επίσης κάθετες στην $\Sigma_1\Sigma_2$ και οι τιμές τους θα είναι ίσες με (βλέπε στο σχήμα)

$$\upsilon_1 = \upsilon_3 + \alpha\omega, \qquad \upsilon_2 = \upsilon_3 - b\omega \tag{1}$$

Επειδή στο σύστημα δεν ενεργεί καμιά εξωτερική ώση, η ορμή του παραμένει ίδια πριν και μετά το τέντωμα, δηλ.

$$mu = m\upsilon_1 + m\upsilon_2 + m\upsilon_3 \tag{2}$$

Επίσης, η στροφορμή του ως προς το O παραμένει ίση με μηδέν, δηλ.

$$0 = m\upsilon_1\alpha - m\upsilon_2 b \tag{3}$$

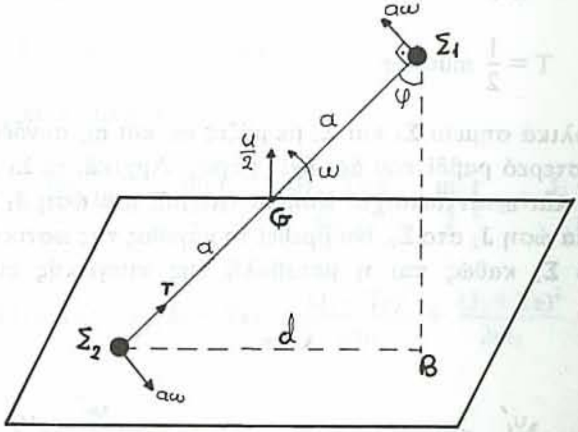
Από τις (1), (2), (3) βρίσκουμε

$$\upsilon_3 = \frac{\alpha^2 + b^2}{\alpha^2 + b^2 + \alpha b} \cdot \frac{u}{2}, \quad \omega = \frac{b - \alpha}{\alpha^2 + b^2}\, \upsilon_3$$

6) Δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2, με μάζα m το καθένα, συνδέονται μεταξύ τους με ένα νήμα που είναι μη-εκτατό και έχει μήκος 2α. Τα Σ_1, Σ_2 ηρεμούν πάνω σε οριζόντιο τραπέζι σε απόσταση d(< 2α) μεταξύ τους.

Κάποια στιγμή, το Σ_1 εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω έτσι ώστε η ταχύτητά του λίγο πριν να τεντωθεί το νήμα να είναι ίση με u. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της $\Sigma_1 \Sigma_2$ και η ωστική τάση του νήματος αμέσως μετά το τέντωμά του.

Λύση



Λίγο πριν να τεντωθεί το νήμα, το κέντρο μάζας G των Σ_1, Σ_2 βρίσκεται στο μέσο της $\Sigma_1\Sigma_2$ και έχει ταχύτητα u/2. Επίσης, η στροφορμή ως προς G του συστήματος είναι ίση με $L_1 = mud/2$ (επειδή η απόσταση του G από την Σ_1B είναι d/2). Αν ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του νήματος αμέσως μετά το τέντωμα, οι ταχύτητες των Σ_1, Σ_2 ως προς το G έχουν μέτρο αω (βλέπε στο σχήμα) και γιαυτό η στροφορμή του συστήματος ως προς G είναι ίση με $L_2 = m\alpha\omega\,\alpha + m\alpha\omega\alpha = 2m\alpha^2\omega$.

Επειδή στο σύστημα δεν ενεργούν εξωτερικές ώσεις, η στροφορμή του ως προς G παραμένει σταθερή, δηλ.

$$L_1 = L_2 \quad \text{ή} \quad mud/2 = 2m\alpha^2\omega \quad \text{ή} \quad \omega = ud/4\alpha^2$$

Επίσης, σταθερή παραμένει και η ορμή του συστήματος. Άρα, η ταχύτητα του G παραμένει πάλι ίση με u/2.

Η ωστική τάση Τ που αναπτύσσεται στο Σ_2 μόλις τεντωθεί το νήμα έχει τη διεύθυνση της $\Sigma_2\Sigma_1$ και είναι ίση με τη μεταβολή Δp_2 της ορμής του Σ κατά τη διεύθυνση αυτή, δηλ.

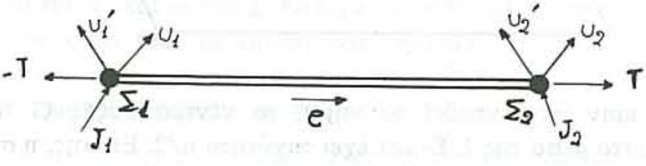
$$T = \Delta p_2 \tag{1}$$

Πριν από το τέντωμα, η ορμή του Σ_2 είναι μηδενική επειδή αυτό ηρεμούσε. Αμέσως μετά το τέντωμα, η συνολική ταχύτητα υ_2 του Σ_2 είναι συνισταμένη της κατακόρυφης ταχύτητας $u/2$ του κέντρου μάζας G και της περιστροφικής ταχύτητας αω του Σ_2 γύρω από το G (βλέπε στο σχήμα). Επομένως, η προβολή υ_{2n} της υ_2 κατά τη διεύθυνση $\overrightarrow{\Sigma_2\Sigma_1}$ είναι ίση με $u\sigma\upsilon\nu\varphi/2$ (όπου $\eta\mu\varphi = d/2\alpha$). Επειδή είναι $\Delta p_2 = m\Delta\upsilon_{2n}$, η (1) δίνει

$$T = \frac{1}{2}\, mu\sigma\upsilon\nu\varphi$$

7) Δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 συνδέονται μεταξύ τους με ένα στερεό ραβδί που δεν έχει βάρος. Αρχικά, τα Σ_1 και Σ_2 έχουν ταχύτητες υ_1 και υ_2 αντίστοιχα. Κάποια στιγμή, μια ώση J_1 εφαρμόζεται στο Σ_1 και μια ώση J_2 στο Σ_2. Να βρεθεί το μέγεθος της ωστικής τάσης του ραβδιού στο Σ_1 καθώς και η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

Λύση



Έστω e μια διανυσματική μονάδα κατά τη διεύθυνση $\overrightarrow{\Sigma_1\Sigma_2}$ και υ_1', υ_2' οι ταχύτητες των Σ_1, Σ_2 αμέσως μετά τις ώσεις. Το ραβδί ασκεί μια ωστική τάση $T = Te$ στο Σ_2 και μια ωστική τάση $-T$ στο Σ_1 (δράση-αντίδραση).

Στο Σ_1 ενεργεί συνολική ώση $J_1 - Te$ που προκαλεί μεταβολή στον ορμή του ίση με $m_1(\upsilon_1' - \upsilon_1)$, ενώ στο Σ_2 ενεργεί συνολική τάση $J_2 + Te$ που προκαλεί μεταβολή στην ορμή του ίση με $m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2)$. Άρα θα ισχύουν οι σχέσεις

$$J_1 - Te = m_1(\upsilon_1' - \upsilon_1) \tag{1}$$

$$J_2 + Te = m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2) \tag{2}$$

Επειδή το ραβδί είναι στερεό, θα ισχύει η σχέση

$$e(\upsilon_1' - \upsilon_1) = e(\upsilon_2' - \upsilon_2) \tag{3}$$

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{J_1}{m_1} - \frac{J_2}{m_2} \right) \tag{4}$$

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με

$$T_1 = m_1 \upsilon_1^2/2 + m_2 \upsilon_2^2/2$$

και η τελική είναι ίση με

$$T_2 = \frac{m_1}{2} (\upsilon_1')^2 + \frac{m_2}{2} (\upsilon_2')^2 = \frac{m_1}{2}\left[\upsilon_1 + \frac{J_1 - Te}{m_1}\right]^2 + \frac{m_2}{2}\left[\upsilon_2 + \frac{J_2 + Te}{m_2}\right]^2 =$$

$$= T_1 + \upsilon_1(J_1 - Te) + \upsilon_2(J_2 + Te) + \frac{(J_1 - Te)^2}{2m_1} + \frac{(J_2 + Te)^2}{2m_2}$$

΄Αρα

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \upsilon_1 \cdot J_1 + \upsilon_2 \cdot J_2 + T(e \cdot \upsilon_2 - e \cdot \upsilon_1)$$

$$+ (J_1^2 - 2Te \cdot J_1 + T^2)/2m_1 + (J_2^2 + 2Te \cdot J_2 + T^2)/2m_2 =$$

$$= \upsilon_1 \cdot J_1 + \upsilon_2 \cdot J_1 + \frac{1}{2} (J_1^2/m_1 + J_2^2/m_2) + (m_1 + m_2)T^2/2m_1 m_2$$

$$+ T[e \cdot J_2/m_2 - e \cdot J_1/m_1]$$

Σύμφωνα με την (4) είναι

$$e \cdot J_2/m_2 - e \cdot J_1/ m_1 = -(m_1 + m_2)(m_1 m_2)^{-1} T$$

΄Αρα η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\Delta T = J_1 \cdot \upsilon_1 + J_2 \cdot \upsilon_2 + \frac{1}{2} \left[\frac{J_1^2}{m_1} + \frac{J_2^2}{m_2}\right] - \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2} T^2$$