ΜΑΤΘΑΙΟΥ Ν. ΜΙΧΑΛΟΔΗΜΗΤΡΑΚΗ
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ
1986

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

| | σελ |
|---|---|
| 1. Δυναμική κατά Lagrange | 9 |
| α) Δυναμική των υλικών σημείων | 10 |
| β) Δυναμική των στερεών σωμάτων | 75 |
| $\beta_1$: Κατά Lagrange | 75 |
| $\beta_2$: Άλλες μέθοδοι | 139 |
| γ) Μικρές ταλαντώσεις | 152 |
| 2. Δυναμική κατά Hamilton | 165 |

# 1. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΤΑ LAGRANGE

Οι ασκήσεις της Δυναμικής κατά Lagrange του τεύχους αυτού έχου ως κύριο σκοπό να βοηθήσουν στην κατανόηση των βασικών εννοιών κα μεθόδων της Δυναμικής κατά Lagrange. Γι' αυτό, δεν ασχολούνται με τ λύση των Δ.Ε της κίνησης αλλά με τη διαδικασία που χρειάζεται γι να φτάσει κανείς στις εξισώσεις αυτές. Η διαδικασία αυτή αποτελείται απ τα παρακάτω βήματα:

1) Βρίσκουμε τους δεσμούς της κίνησης, τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος και διαλέγουμε τις κατάλληλες για το πρόβλημά μα γενικευμένες συντεταγμένες.

2) Γράφουμε τους γενικούς τύπους που δίνουν την κινητική ενέργει T και τη δυναμική ενέργεια V του μηχανικού συστήματος ως προς τ αδρανειακό σύστημα αναφοράς που έχουμε διαλέξει.

3) Εκφράζουμε τις ενέργειες T και V με τη βοήθεια των γενικευμένω συντεταγμένων και των παραγώγων τους και υπολογίζουμε την Λαγκραν ζιανή $L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - V(q,t)$ του συστήματος.

4) Αντικαθιστούμε τη Λαγκρανζιανή L στις εξισώσεις του Lagrang

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

και εκτελώντας τις παραγωγίσεις βρίσκουμε τις Δ.Ε της κίνησης.

5) Αν η άσκηση ζητάει τα ολοκληρώματα της κίνησης, ψάχνουμε στ Λαγκρανζιανή για να βρούμε αγνοήσιμες γενικευμένες συντεταγμένες (τ γενικευμένη ορμή που αντιστοιχεί σε μια αγνοήσιμη συντεταγμένη, είνα ολοκλήρωμα της κίνησης) και να δούμε αν περιέχει λυτά το χρόνο t. Α δεν τον περιέχει, τότε υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi.

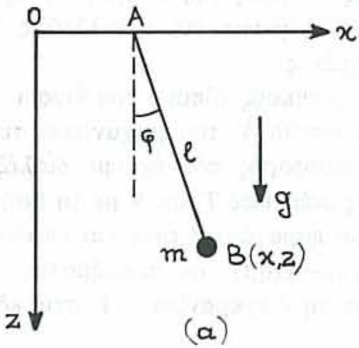
Για το λόγο που αναφέραμε στην αρχή, στις ασκήσεις που θα ακολουθήσουν θα δίνουμε μόνο την περιγραφή του Μηχανικού συστήματος που μελετάμε και θα εννοούμε, έστω και αν δεν το γράφουμε σε κάθε άσκηση ξεχωριστά, ότι ζητάμε να βρούμε τις διαφορικές εξισώσεις της κίνησης με τη μέθοδο του Lagrange.

Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση των μικρών ταλαντώσεων όπου μας ενδιαφέρει περισσότερο η συμπεριφορά του συστήματος, δηλαδή η λύση των διαφορικών εξισώσεων της κίνησης και όχι ο τρόπος εύρεσής τους. Επίσης, στις ασκήσεις των στερεών σωμάτων που δεν αντιμετωπίζονται με τη μέθοδο του Lagrange δίνεται και η λύση των διαφορικών εξισώσεων της κίνησης.

## α) Δυναμική των υλικών σημείων

1) Απλό εκκρεμές κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο XOZ έτσι ώστε το σημείο εξάρτησης του A να εκτελεί αρμονική ταλάντωση $OA = \alpha\sigma\upsilon\nu\omega t$ πάνω στον οριζόντιο άξονα OX είτε πάνω στον κατακόρυφο άξονα OZ.

Λύση




(α)

Υπάρχει ένας δεσμός, ο $AB = \sigma\tau\alpha\theta. \equiv l$. Επομένως η μάζα m έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία φ. Από το σχήμα προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των Καρτεσιανών (αδρανειακών) συντεταγμένων x, z της m είναι

$$x = OA + l\eta\mu\varphi = \alpha\sigma\upsilon\nu\omega t + l\eta\mu\varphi, \qquad z = l\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε τις καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας της m, δηλαδή

$$\dot{x} = -\alpha\omega\eta\mu\omega t + l\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi, \qquad \dot{z} = -l\dot{\varphi}\eta\mu\varphi \qquad (2)$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\, m(\alpha^2\omega^2\eta\mu^2\omega t + l^2\dot{\varphi}^2 - 2\alpha\omega l\dot{\varphi}\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\varphi)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της m είναι

$$V = -mgz = -mgl\,\text{συν}\varphi$$

Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m(\alpha^2\omega^2\text{ημ}^2\omega t + l^2\dot{\varphi}^2 - 2\alpha\omega l\dot{\varphi}\,\text{ημ}\omega t\,\text{συν}\varphi) + mgl\,\text{συν}\varphi \qquad (3)$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Παραγωγίζοντας την (3) βρίσκουμε

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m\alpha\omega l\dot{\varphi}\,\text{ημ}\omega t\,\text{ημ}\varphi - mgl\,\text{ημ}\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \pm m\alpha\omega l\,\text{ημ}\omega t\,\text{συν}\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} \pm m\alpha\omega^2 l\,\text{συν}\omega t\,\text{συν}\varphi - m\alpha\omega l\dot{\varphi}\,\text{ημ}\omega t\,\text{ημ}\varphi$$

Άρα η εξίσωση του Lagrange γίνεται τελικά

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\,\text{ημ}\varphi - \frac{\alpha\omega^2}{l}\,\text{συν}\omega t\,\text{συν}\varphi = 0$$

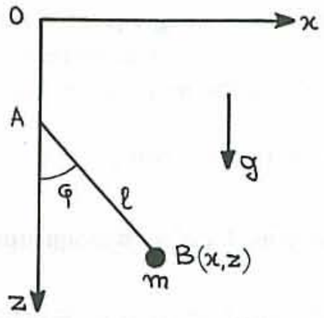
Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση της κίνησης της m.

β) Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις μετασχηματισμού των συντεταγμένων είναι

$$x = l\,\text{ημ}\varphi, \qquad z = \alpha\,\text{συν}\omega t + l\,\text{συν}\varphi \qquad (4)$$

Παραγωγίζοντας τις (4) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = l\dot{\varphi}\,\text{συν}\varphi, \qquad \dot{z} = -\alpha\omega\,\text{ημ}\omega t - l\dot{\varphi}\,\text{ημ}\varphi \qquad (5)$$




Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\, m(\alpha^2\omega^2 \eta\mu^2\omega t + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\alpha\omega l\dot{\varphi}\, \eta\mu\omega t\, \eta\mu\varphi)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της m είναι

$$V = -mgz = -mg(\alpha\sigma\upsilon\nu\omega t + l\sigma\upsilon\nu\varphi)$$

Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m(\alpha^2\omega^2\eta\mu^2\omega t + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\alpha\omega l\dot{\varphi}\, \eta\mu\omega t\, \eta\mu\varphi) + mg(\alpha\sigma\upsilon\nu\omega t + l\sigma\upsilon\nu\varphi)$$

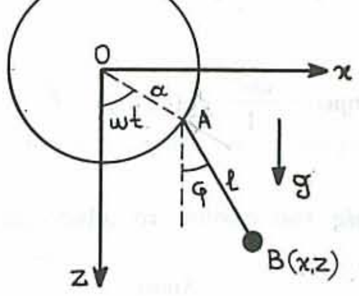
Άρα η εξίσωση του Lagrange γίνεται τελικά

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\, \eta\mu\varphi + \frac{\alpha\omega^2}{l}\, \sigma\upsilon\nu\omega t\, \eta\mu\varphi = 0$$

**2)** Το σημείο εξάρτησης απλού εκκρεμούς εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση πάνω σε μία περιφέρεια η οποία βρίσκεται πάνω σε κατακόρυφο επίπεδο.

Λύση

Θεωρούμε ότι και η κίνηση της m γίνεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο XOZ. Υπάρχει ένας δεσμός, ο AB = σταθ. ≡ l. Επομένως, με τις προηγούμενες προϋποθέσεις, η μάζα m έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία φ. Από το σχήμα προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων της m είναι




$$x = x_A + l\eta\mu\varphi = \alpha\eta\mu\omega t + l\eta\mu\varphi$$

$$z = z_A + l\sigma\upsilon\nu\varphi = \alpha\sigma\upsilon\nu\omega t + l\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (1)$$

όπου α είναι η ακτίνα της περιφέρειας και ω η γωνιακή ταχύτητα του A.

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = \alpha\omega\sigma\upsilon\nu\omega t + l\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\dot{z} = -\alpha\omega\eta\mu\omega t - l\dot{\varphi}\eta\mu\varphi \qquad (2)$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\, m[\alpha^2\omega^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\alpha\omega l\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu(\omega t - \varphi)]$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της m είναι

$$V = -mgz = -mg(\alpha\sigma\upsilon\nu\omega t + l\sigma\upsilon\nu\varphi)$$

Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m[\alpha^2\omega^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\alpha\omega l\dot{\varphi}\,\sigma\upsilon\nu(\omega t - \varphi)] + mg(\alpha\sigma\upsilon\nu\omega t + l\sigma\upsilon\nu\varphi) \quad (3)$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας, θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

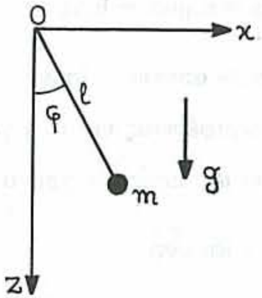
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Παραγωγίζοντας την (3) βρίσκουμε ότι η εξίσωση του Lagrange γίνεται τελικά

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\,\text{ημ}\varphi - \frac{\alpha\omega^2}{l}\,\text{ημ}(\omega t - \varphi) = 0$$

3) Απλό εκκρεμές του οποίου το μήκος μεταβάλλεται με γνωστό τρόπο.

Λύση




Υπάρχει ένας δεσμός, ο $l = l(t)$. Επομένως η m έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία φ. Από το σχήμα προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων της m είναι

$$x = l\,\text{ημ}\varphi, \qquad z = l\,\text{συν}\varphi \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = l\dot{\varphi}\,\text{συν}\varphi + \dot{l}\,\text{ημ}\varphi, \qquad \dot{z} = -l\dot{\varphi}\,\text{ημ}\varphi + \dot{l}\,\text{συν}\varphi \tag{2}$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\,m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\,m(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{l}^2)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της m είναι

$$V = -mgz = -mgl\,\text{συν}\varphi$$

Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{l}^2) + mgl\,\text{συν}\varphi \qquad (3)$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας, θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

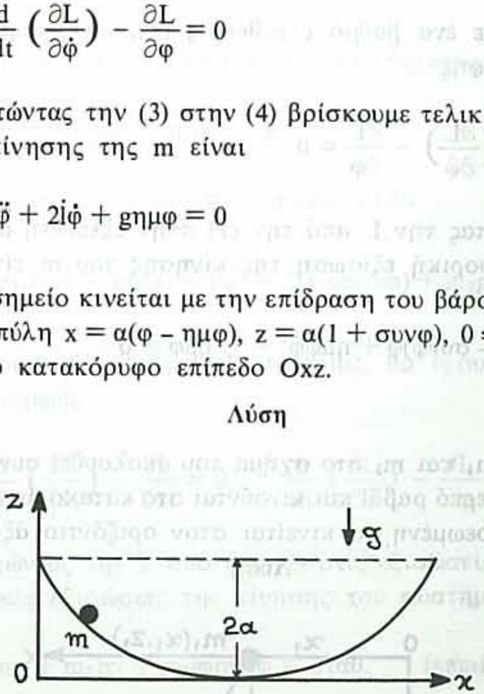
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (4) βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης της m είναι

$$l\ddot{\varphi} + 2\dot{l}\dot{\varphi} + g\,\text{ημ}\varphi = 0$$

**4)** Υλικό σημείο κινείται με την επίδραση του βάρους του πάνω στην κυκλοειδή καμπύλη $x = \alpha(\varphi - \text{ημ}\varphi)$, $z = \alpha(1 + \text{συν}\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Η κίνηση γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο Oxz.

Λύση




Το υλικό σημείο έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη την παράμετρη φ. Η εξίσωση του δεσμού είναι

$$x = \alpha(\varphi - \text{ημ}\varphi) \qquad z = \alpha(1 + \text{συν}\varphi)$$

$$\dot{x} = \alpha\dot{\varphi}(1 - \text{συν}\varphi), \qquad \dot{z} = -\alpha\dot{\varphi}\,\text{ημ}\varphi$$

Επομένως η κινητική ενέργεια του m είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = m\alpha^2\dot{\varphi}^2(1 - \text{συν}\varphi)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του m είναι

$$V = mgz = mg\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του m είναι

$$L = T - V = m\alpha^2\dot{\varphi}^2(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) - mg\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας (φ), θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

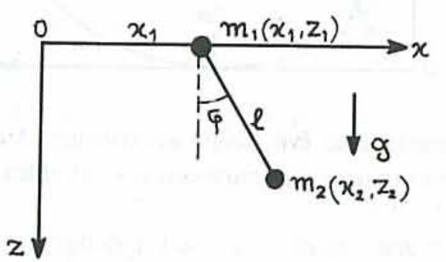
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Αντικαθιστώντας την L από την (1) στην εξίσωση αυτή βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης του m είναι

$$2(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)\ddot{\varphi} + \eta\mu\varphi\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{\alpha}\,\eta\mu\varphi = 0$$

5) Οι μάζες $m_1$ και $m_2$ στο σχήμα που ακολουθεί συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές στερεό ραβδί και κινούνται στο κατακόρυφο επίπεδο XOZ. Η $m_1$ είναι υποχρεωμένη να κινείται στον οριζόντιο άξονα OX.

Λύση




Υπάρχουν δύο δεσμοί, οι $z_1 = 0$ και $l = \sigma\tau\alpha\theta.$ Άρα το σύστημα των $m_1$ και $m_2$ έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις $x_1$ και φ. Από το σχήμα προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων της $m_2$ είναι

$$x_2 = x_1 + l\eta\mu\varphi, \qquad z_2 = l\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi, \qquad \dot{z}_2 = -l\dot{\varphi}\eta\mu\varphi$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}\, m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2}\, m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2(\dot{x}_1^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$V = -m_2gz_2 = -m_2gl\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2(\dot{x}_1^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi) + m_2gl\,\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (2)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας, θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Αντικαθιστώντας την L από την (2) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

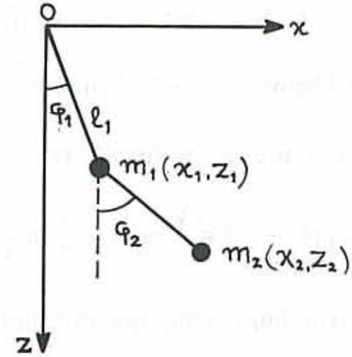
$$(m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2l\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (\varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \partial L/\partial x = 0)$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x}_1\sigma\upsilon\nu\varphi + g\eta\mu\varphi = 0$$

6) Διπλό μαθηματικό εκκρεμές που κάνει μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Λύση

Υπάρχουν δύο δεσμοί, οι $l_1 = \sigma\tau\alpha\theta.$, $l_2 = \sigma\tau\alpha\theta.$ Άρα το σύστημα των $m_1$ και $m_2$ έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες $\varphi_1$ και $\varphi_2$. Από το σχήμα προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων των $m_1$ και $m_2$




είναι

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \eta\mu\varphi_1, \qquad x_2 = x_1 + l_2 \eta\mu\varphi_2 \\ z_1 &= l_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1, \qquad z_2 = z_1 + l_2 \sigma\upsilon\nu\varphi_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1, \qquad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \sigma\upsilon\nu\varphi_2 \\ \dot{z}_1 &= -l_1 \dot{\varphi}_1 \eta\mu\varphi_1, \qquad \dot{z}_2 = \dot{z}_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \eta\mu\varphi_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2} m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2[l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 +$$
$$+ 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$V = -m_1 g z_1 - m_2 g z_2 = -m_1 g l_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1 - m_2 g(l_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1 + l_2 \sigma\upsilon\nu\varphi_2)$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2)] +$$
$$+ (m_1 + m_2) g l_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1 + m_2 g l_2 \sigma\upsilon\nu\varphi_2$$

Επειδή τα πλάτη των ταλαντώσεων είναι μικρά, οι γωνίες $\varphi_1$, $\varphi_2$ θα είναι μικρές, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\eta\mu\varphi_i \simeq \varphi_i, \qquad \sigma\upsilon\nu\varphi_i \simeq 1 - \varphi_i^2/2, \qquad \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2) \simeq \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \tag{3}$$

Με τη βοήθεια των (3) η Λαγκρανζιανή γίνεται (μετά την παράλειψη των σταθερών όρων)

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}g[(m_1+m_2)l_1\varphi_1^2 + m_2l_2\varphi_2^2] \tag{4}$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας, θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = 0$$

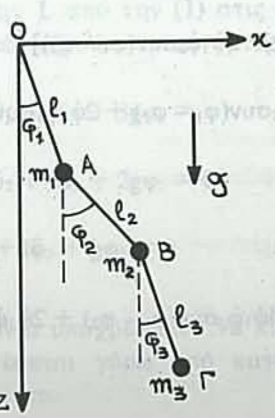
Αντικαθιστώντας την έκφραση (4) της L στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις των μικρών ταλαντώσεων του διπλού εκκρεμούς είναι

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\varphi}_1 + m_2l_2\ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2)g\varphi_1 = 0$$

$$l_2\ddot{\varphi}_2 + l_1\ddot{\varphi}_1 + g\varphi_2 = 0$$

7) Τριπλό μαθηματικό εκκρεμές που κάνει μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ και έχει $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $l_1 = l_2 = l_3 = l$.

Λύση



Το σύστημα έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 \upsilon_2^2 + \frac{1}{2}\, m_3 \upsilon_3^2 = \frac{m}{2}\, (\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2)$$

ή

$$T = \frac{m}{2}\, (\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{z}_3^2)$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων των μαζών είναι

$$\begin{aligned}
&x_1 = l\eta\mu\varphi_1 && z_1 = l\sigma\upsilon\nu\varphi_1 \\
&x_2 = x_1 + l\eta\mu\varphi_2 = l(\eta\mu\varphi_1 + \eta\mu\varphi_2), && z_2 = z_1 + l_2\sigma\upsilon\nu\varphi_2 = l(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + \sigma\upsilon\nu\varphi_2) \\
&x_3 = x_2 + l\eta\mu\varphi_3 = l(\eta\mu\varphi_1 + \eta\mu\varphi_2 + \eta\mu\varphi_3) && z_3 = z_2 + l\sigma\upsilon\nu\varphi_3 = l(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + \sigma\upsilon\nu\varphi_2 + \sigma\upsilon\nu\varphi_3)
\end{aligned} \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = l\dot{\varphi}_1\sigma\upsilon\nu\varphi_1, && \dot{z}_1 = -l\dot{\varphi}_1\eta\mu\varphi_1 \\
&\dot{x}_2 = l(\dot{\varphi}_1\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\sigma\upsilon\nu\varphi_2), && \dot{z}_2 = -l(\dot{\varphi}_1\eta\mu\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\eta\mu\varphi_2) \\
&\dot{x}_3 = l(\dot{\varphi}_1\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + \dot{\varphi}_3\sigma\upsilon\nu\varphi_3), && \dot{z}_3 = -l(\dot{\varphi}_1\eta\mu\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\eta\mu\varphi_2 + \dot{\varphi}_3\eta\mu\varphi_3)
\end{aligned}$$

Άρα θα είναι

$$\upsilon_1^2 = l^2\dot{\varphi}_1^2, \qquad \upsilon_2^2 = l^2[\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$\begin{aligned}
\upsilon_3^2 = l^2[&\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_3) + \\
&+ 2\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3\sigma\upsilon\nu(\varphi_2 - \varphi_3)]
\end{aligned}$$

Επομένως η T γίνεται

$$\begin{aligned}
T = \frac{ml^2}{2}\, [&3\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 4\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_3) + \\
&+ 2\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3\sigma\upsilon\nu(\varphi_2 - \varphi_3)]
\end{aligned}$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$V = -m_1gz_1 - m_2gz_2 - m_3gz_3 = -mgl\,(3\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + 2\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + \sigma\upsilon\nu\varphi_3)$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{ml^2}{2}\,[3\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 4\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2) +$$

$$+ 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_3) + 2\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3\sigma\upsilon\nu(\varphi_2 - \varphi_3)]$$

$$+ mgl(3\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + 2\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + \sigma\upsilon\nu\varphi_3)$$

Επειδή οι ποσότητες $\varphi_i$ και $\dot{\varphi}_i$ είναι μικρές (μικρές ταλαντώσεις) μπορούμε να γράψουμε

$$\sigma\upsilon\nu\varphi_i \simeq 1 - \varphi_i^2/2,\ \eta\mu\varphi_i \simeq \varphi_i,\ \dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j\sigma\upsilon\nu(\varphi_i - \varphi_j) \simeq \dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j$$

Επομένως η L γίνεται (μετά την παράλειψη των σταθερών όρων)

$$L = \frac{ml^2}{2}\,[3\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 4\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 + 2\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3] - \frac{mgl}{2}[3\varphi_1^2+2\varphi_2^2+\varphi_3^2]\ (1)$$

Επειδή έχουμε τρεις βαθμούς ελευθερίας ($\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$), θα έχουμε τρεις εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0 \quad i = 1,\ 2,\ 3$$

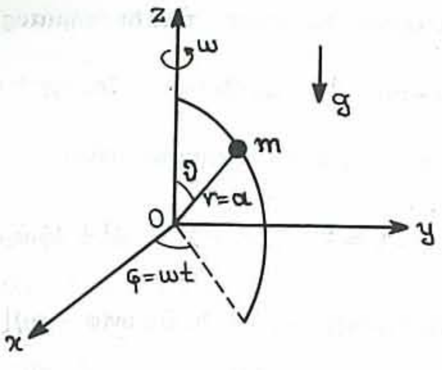
Αντικαθιστώντας την L από την (1) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις των μικρών ταλαντώσεων είναι

$$3l\ddot{\varphi}_1 + 2l\ddot{\varphi}_2 + l\ddot{\varphi}_3 + 3g\varphi_1 =$$

$$2l\ddot{\varphi}_1 + 2l\ddot{\varphi}_2 + l\ddot{\varphi}_3 + 2g\varphi_2 = 0$$

$$l\ddot{\varphi}_1 + l\ddot{\varphi}_2 + l\ddot{\varphi}_3 + g\varphi_3 = 0$$

8) Υλικό σημείο είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω σε μία περιφέρεια η οποία περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφη διάμετρό της με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.




Λύση

Υπάρχουν δύο δεσμοί, οι $r = σταθ. \equiv α$ και $φ = ωt$, όπου α είναι η ακτίνα της περιφέρειας και ω η γωνιακή της ταχύτητα. Επομένως η μάζα m έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία ϑ. Από το σχήμα και τις εξισώσεις των δεσμών προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων της m είναι

$$x = αημϑσυνωt, \quad y = αημϑημωt, \quad z = ασυνϑ \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = α\dot{ϑ}συνϑσυνωt - αωημϑημωt$$

$$\dot{y} = α\dot{ϑ}συνϑημωt + αωημϑσυνωt$$

$$\dot{z} = -α\dot{ϑ}ημϑ$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\, m(α^2\dot{ϑ}^2 + α^2ω^2ημ^2ϑ)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της m είναι

$$V = mgz = mgασυνϑ$$

Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{mα^2}{2}\,(\dot{ϑ}^2 + ω^2ημ^2ϑ) - mgασυνϑ \tag{2}$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας, θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

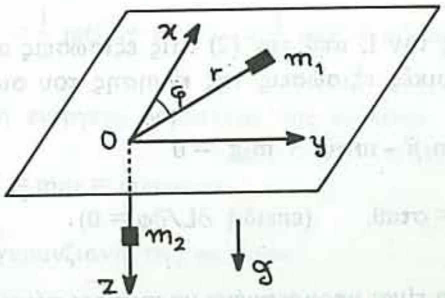
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$$

Αντικαθιστώντας την L από την (2) στην εξίσωση αυτή βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης της m είναι

$$\ddot{\vartheta} - \omega^2 \eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta - \frac{g}{\alpha}\,\eta\mu\vartheta = 0$$

9) Οι δύο μάζες στο παρακάτω σχήμα συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές μη-εκτατό νήμα μήκους l. Η μία μάζα κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο ΧΟΥ και η άλλη πάνω στον κατακόρυφο άξονα ΟΖ. Κατά την κίνησή τους θεωρούμε ότι το νήμα παραμένει τεντωμένο (το νήμα περνάει από την τρύπα Ο).

Λύση




Για την κίνηση στον τριδιάστατο χώρο υπάρχουν τέσσερις δεσμοί, οι $z_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $z_2 + r = l =$ σταθ. Επομένως το σύστημα των μαζών $m_1$ και $m_2$ έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις πολικές συντεταγμένες r, φ της $m_1$ ως προς το ΟΧΥ. Από το σχήμα και τις εξισώσεις των δεσμών βρίσκουμε ότι οι τύποι μετασχηματισμού των Καρτεσιανών συντεταγμένων του συστήματος είναι

$$x_1 = r\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad y_1 = r\eta\mu\varphi, \quad z_2 = l - r \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x}_1 = -r\dot{\varphi}\eta\mu\varphi + \dot{r}\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad \dot{y}_1 = r\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi + \dot{r}\eta\mu\varphi, \quad \dot{z}_2 = -\dot{r}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2} m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2} m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} m_2\dot{r}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$V = -m_2gz_2 = -m_2g(l - r)$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} m_2\dot{r}^2 + m_2g(l - r) \qquad (2)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας, θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

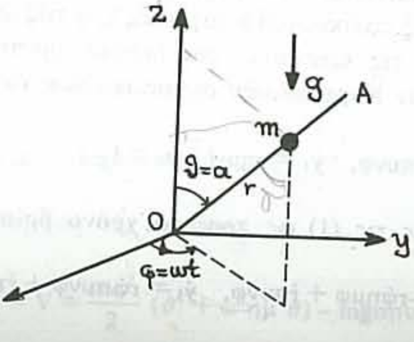
Αντικαθιστώντας την L από την (2) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - m_1r\dot{\varphi}^2 + m_2g = 0$$

$$m_1r^2\dot{\varphi} = \text{σταθ.} \qquad (\text{επειδή } \partial L/\partial\varphi = 0)$$

**10)** Υλικό σημείο είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω σε μία ευθεία η οποία περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα σχηματίζοντας πάντοτε σταθερή γωνία α με αυτόν.

Λύση



Υπάρχουν δύο δεσμοί, οι $\vartheta =$ σταθ. $\equiv \alpha$ και $\varphi = \omega t$. Επομένως η μάζα m έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη την απόσταση r. Από το σχήμα και από τις εξισώσεις των δεσμών προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των Καρτεσιανών συντεταγμένων της m είναι

$$x = r\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\omega t, \qquad y = r\,\eta\mu\alpha\,\eta\mu\omega t, \qquad z = r\,\sigma\upsilon\nu\alpha \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = \dot{r}\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\omega t - \omega r\,\eta\mu\alpha\,\eta\mu\omega t,$$

$$\dot{y} = \dot{r}\,\eta\mu\alpha\,\eta\mu\omega t + \omega r\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\omega t,$$

$$\dot{z} = \dot{r}\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \eta\mu^2\alpha)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της m είναι

$$V = mgz = mgr\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \eta\mu^2\alpha) - mgr\,\sigma\upsilon\nu\alpha \tag{2}$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

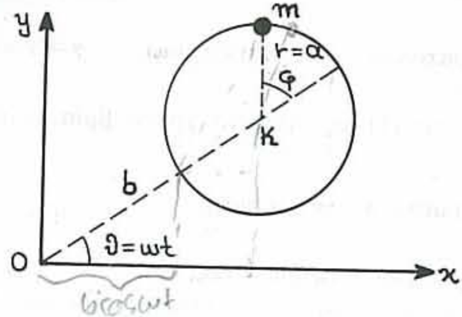
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad \zeta \equiv \phi$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην εξίσωση αυτή βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης της m είναι

$$\ddot{r} - \omega^2 r\,\eta\mu^2\alpha + g\,\sigma\upsilon\nu\alpha = 0$$

**11)** Υλικό σημείο είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω σε μία περιφέρεια η οποία βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα.

Λύση




Υπάρχουν δύο δεσμοί, οι $\vartheta = \omega t$ και $r = \sigma\tau\alpha\theta. = \alpha$. Επομένως η μάζα m έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία φ. Από το σχήμα και από τις εξισώσεις των δεσμών προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων της m είναι

$$x = b\sigma\upsilon\nu\omega t + \alpha\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi), \quad y = b\eta\mu\omega t + \alpha\eta\mu(\omega t + \varphi) \qquad (1)$$

όπου α είναι η ακτίνα της περιφέρειας και $b = OK = \sigma\tau\alpha\theta.$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = -b\omega\eta\mu\omega t - \alpha(\omega + \dot{\varphi})\eta\mu(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{y} = b\omega\sigma\upsilon\nu\omega t + \alpha(\omega + \dot{\varphi})\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi)$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}\, m[b^2\omega^2 + \alpha^2(\omega + \dot{\varphi})^2 + 2\alpha b\omega(\omega + \dot{\varphi})\sigma\upsilon\nu\varphi]$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της m είναι ίση με μηδέν γιατί κινείται σε οριζόντιο επίπεδο. Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T = \frac{1}{2}\, m[b^2\omega^2 + \alpha^2(\omega + \dot{\varphi})^2 + 2\alpha b\omega(\omega + \dot{\varphi})\sigma\upsilon\nu\varphi] \qquad (2)$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

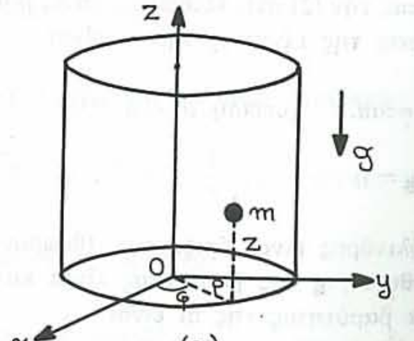
Αντικαθιστώντας την (2) στην εξίσωση αυτή βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης της m είναι

$$\ddot{\varphi} + \frac{b\omega^2}{\alpha}\,\text{ημφ} = 0 \qquad \left[\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\,\text{ημφ} = 0\ \right]$$

Επομένως η m κινείται γύρω από την ΟΚ σαν απλό εκκρεμές μήκους $\alpha g/b\omega^2$.

· **12)** Υλικό σημείο είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω στην επιφάνεια ορθού κυκλικού κυλίνδρου ο άξονας του οποίου είναι είτε κατακόρυφος είτε οριζόντιος.

Λύση



(α)

α) Υπάρχει ένας δεσμός, ο ρ = σταθ. ≡ α. Επομένως η μάζα m έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις φ και z. Από το σχήμα και από την εξίσωση του δεσμού προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων της m είναι

$$x = \alpha\,\text{συνφ}, \qquad y = \alpha\,\text{ημφ} \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = -\alpha\dot{\varphi}\,\text{ημφ}, \qquad \dot{y} = \alpha\dot{\varphi}\,\text{συνφ}$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\, m(\alpha^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της m είναι

$$V = mgz$$

Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m(\alpha^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz \tag{2}$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

Αντικαθιστώντας την (2) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης της m είναι

$$\dot{\varphi} = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (\text{επειδή } \partial L/\partial\varphi = 0)$$

$$\ddot{z} + g = 0$$

β) Όταν ο κύλινδρος είναι οριζόντιος (θεωρούμε στο προηγούμενο σχήμα ότι η διεύθυνση g της βαρύτητας είναι κατά τον άξονα ΟΥ) η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της m είναι

$$V = mgy = mg\alpha\eta\mu\varphi$$

οπότε οι εξισώσεις Lagrange γίνονται τελικά

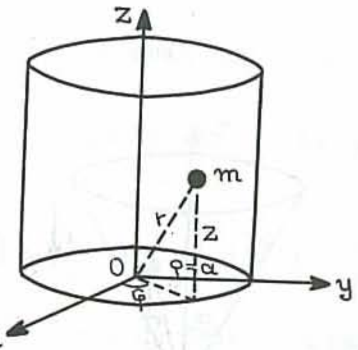
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\alpha}\,\sigma\upsilon\nu\varphi = 0$$

$$\dot{z} = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (\text{επειδή } \partial L/\partial z = 0)$$

* 13) Υλικό σημείο είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω στην επιφάνεια ορθού κυκλικού κυλίνδρου και δέχεται την επίδραση ελκτικής δύναμης

$F = -kr$ $(k > 0)$ η οποία πηγάζει από ένα σημείο Ο του άξονα του κυλίνδρου και είναι ανάλογη προς την απόσταση r του σημείου από το Ο. Βαρύτητα δεν υπάρχει.

Λύση




Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση, η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\alpha^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

Η δυναμική ενέργεια της m, που οφείλεται στην **F**, είναι

$$V = -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\, kr^2 = \frac{1}{2}\, k(\alpha^2 + z^2)$$

Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m(\alpha^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}\, k(\alpha^2 + z^2) \tag{1}$$

Ανάλογα με την προηγούμενη άσκηση, οι δύο εξισώσεις Lagrange γίνονται τελικά

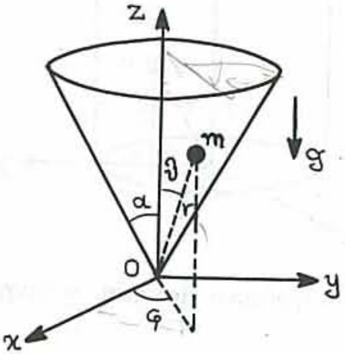
$$\dot{\varphi} = \text{σταθ.} \qquad (\text{επειδή } \partial L/\partial\varphi = 0)$$

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}\, z = 0$$

Παρατηρούμε ότι το υλικό σημείο περιστρέφεται γύρω από τον ΟΖ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\dot{\varphi}$ και ταυτόχρονα εκτελεί αρμονική ταλάντωση κατά τον OZ με κυκλική συχνότητα ίση με $\sqrt{k/m}$.

**14)** Υλικό σημείο είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω στην επιφάνεια κώνου που έχει τον άξονά του κατακόρυφο και την κορυφή του προς τα κάτω.

**Λύση**




Υπάρχει ένας δεσμός, ο $\vartheta = \sigma\tau\alpha\theta. \equiv \alpha$ όπου α είναι το ημιάνοιγμα του κώνου. Επομένως η μάζα m έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις r και φ. Από το σχήμα και από την εξίσωση του δεσμού προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων της m είναι

$$x = r\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi, \qquad y = r\,\eta\mu\alpha\,\eta\mu\varphi, \qquad z = r\,\sigma\upsilon\nu\alpha \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = \dot{r}\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi - r\dot{\varphi}\,\eta\mu\alpha\,\eta\mu\varphi$$

$$\dot{y} = \dot{r}\,\eta\mu\alpha\,\eta\mu\varphi + r\dot{\varphi}\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\dot{z} = \dot{r}\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\,m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\,m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\eta\mu^2\alpha)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της m είναι

$$V = mgz = mgr\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\eta\mu^2\alpha) - mgr\sigma\upsilon\nu\alpha \qquad (2)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας, θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

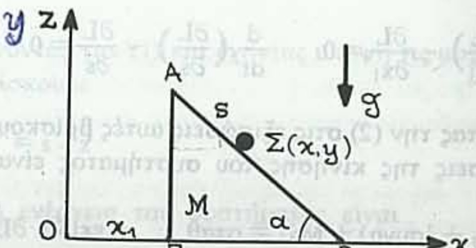
Αντικαθιστώντας την (2) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης της m είναι

$$\ddot{r} - r\eta\mu^2\alpha\dot{\varphi}^2 + g\sigma\upsilon\nu\alpha = 0$$

$$r^2\dot{\varphi} = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (\text{επειδή } \partial L/\partial\varphi = 0)$$

15) Το υλικό σημείο Σ στο παρακάτω σχήμα είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω στην υποτείνουσα του στερεού ΑΒΓ το οποίο έχει μάζα M και μπορεί να γλυστράει πάνω στον άξονα ΟΧ.

Λύση




Υπάρχει ένας δεσμός, ο

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{A\Gamma - y}{x - x_1} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

όπου $x_1 = \text{ΟΓ}$. Επομένως το σύστημα των μαζών m και M έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις $x_1$ και $s = \text{ΑΣ}$. Από το σχήμα και από την εξίσωση του δεσμού προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων της m είναι

$$x = x_1 + s\,\text{συν}\alpha, \qquad y = \text{ΑΓ} - s\,\text{ημ}\alpha \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{s}\,\text{συν}\alpha, \qquad \dot{y} = -\dot{s}\,\text{ημ}\alpha$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}_1\dot{s}\,\text{συν}\alpha)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$V = mgy = mg(\text{ΑΓ} - s\,\text{ημ}\alpha)$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}_1\dot{s}\,\text{συν}\alpha) - mg(\text{ΑΓ} - s\,\text{ημ}\alpha) \tag{2}$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας, θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

Αντικαθιστώντας την (2) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

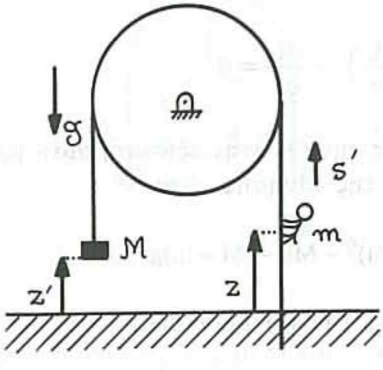
$$m(\dot{x}_1 + \dot{s}\,\text{συν}\alpha) + M\dot{x}_1 = \text{σταθ.} \qquad (\text{επειδή } \partial L/\partial x_1 = 0)$$

$$\ddot{s} + \ddot{x}_1\text{συν}\alpha - g\,\text{ημ}\alpha = 0$$

* 16) Ο πίθηκος στο παρακάτω σχήμα σκαρφαλώνει στο σχοινί έτσι ώστε η θέση του s πάνω στο σχοινί να είναι γνωστή σε κάθε χρονική

στιγμή $s = s(t)$. Θεωρούμε ότι η ενέργεια περιστροφής της τροχαλίας είναι ασήμαντη, ότι το σχοινί είναι αβαρές, μη-εκτατό και δε γλυστράει πάνω στην τροχαλία. Δεχόμαστε επίσης ότι ο πίθηκος και η μάζα M ηρεμούν αρχικά στο έδαφος και $s(0) = \dot{s}(0) = 0$.

Λύση




Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, αν γνωρίζουμε τη θέση $z'$ της μάζας M τότε μπορούμε να βρούμε τη θέση z του πιθήκου ως προς το έδαφος και αντίστροφα. Επομένως το σύστημα (πίθηκος-μάζα M) έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη το ύψος z του πιθήκου. Η απόλυτη (ως προς το έδαφος) ταχύτητα $\dot{z}$ του πιθήκου είναι ίση με το άθροισμα της σχετικής του ταχύτητας $\dot{s}$ ως προς το σχοινί και της ταχύτητας $-\dot{z}'$ του σημείου του σχοινιού στο οποίο βρίσκεται ο πίθηκος, δηλαδή είναι

$$\dot{z} = \dot{s} - \dot{z}' \tag{1}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) και έχοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες του προβήματος βρίσκουμε

$$z' = s - z \tag{2}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, M\dot{z}'^2 + \frac{1}{2}\, m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}\, M(\dot{s} - \dot{z})^2 + \frac{1}{2}\, m\dot{z}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$V = Mgz' + mgz = Mg(s - z) + mgz$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2} M(\dot{s} - \dot{z})^2 + \frac{1}{2} m\dot{z}^2 - Mg(s - z) - mgz \qquad (3)$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας, θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην εξίσωση αυτή βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι

$$(M + m)\ddot{z} - M\ddot{s} - (M - m)g = 0 \qquad (4)$$

Ολοκληρώνοντας την (4) βρίσκουμε

$$(M + m)\dot{z} - M\dot{s} - (M - m)gt = 0 \qquad (5)$$

Ολοκληρώνοντας την (5) βρίσκουμε

$$z = \frac{M}{M + m} s + \frac{1}{2}\left(\frac{m - M}{m + M}\right)gt^2 \qquad (6)$$

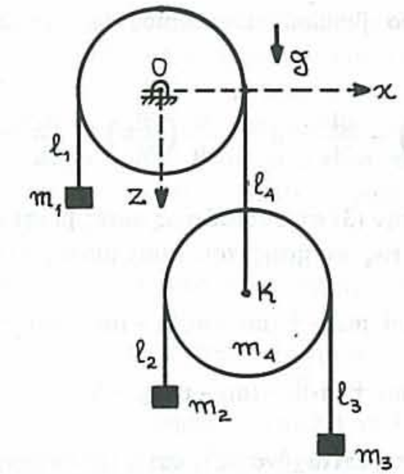
Παρατηρούμε από την (6) ότι αν η μάζα m του πιθήκου είναι ίση με την M τότε θα είναι $z = s/2 = z'$, δηλαδή ο πίθηκος και η μάζα M θα βρίσκονται πάντοτε στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

17) Στη διπλή τροχαλία του παρακάτω σχήματος η κινητική ενέργεια περιστροφής των τροχαλιών θεωρείται ασήμαντη, τα σχοινιά είναι αβαρή και μη-εκτατά και δε γλυστρούν πάνω στις τροχαλίες.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, αν γνωρίζουμε τη θέση $l_1$ της μάζας $m_1$ ως προς την ακίνητη τροχαλία O τότε μπορούμε να βρούμε και τη θέση του κέντρου K της τροχαλίας που κινείται ως προς το O (και αντίστροφα). Επίσης αν γνωρίζουμε τη θέση $l_2$ της $m_2$ ως προς το K τότε μπορούμε να βρούμε και τη θέση της $m_3$ ως προς το K (και αντίστροφα). Ανάμεσα στα $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$ υπάρχουν οι ακόλουθες σχέσεις (δεσμοί)

$$l_1 + l_4 = \text{σταθ.} \equiv c_1, \qquad l_2 + l_3 = \text{σταθ.} \equiv c_2 \qquad (1)$$




Επομένως το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις $l_3$ και $l_4$. Από το σχήμα και από τις σχέσεις (1) προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των Καρτεσιανών συντεταγμένων των $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ είναι

$$z_1 = l_1 = c_1 - l_4, \quad z_2 = l_2 + l_4 = c_2 - l_3 + l_4, \quad z_3 = l_3 + l_4, \quad z_4 = l_4 \qquad (2)$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}\, m_3\dot{z}_3^2 + \frac{1}{2}\, m_4\dot{z}_4^2 = \frac{1}{2}\, m_1\dot{l}_4^2 + \frac{1}{2}\, m_2(\dot{l}_4 - \dot{l}_3)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\, m_3(\dot{l}_3 + \dot{l}_4)^2 + \frac{1}{2}\, m_4\dot{l}_4^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$V = -m_1gz_1 - m_2gz_2 - m_3gz_3 - m_4gz_4 = -m_1g(c_1 - l_4) - m_2g(c_2 + l_4 - l_3) -$$

$$- m_3g(l_3 + l_4) - m_4gl_4$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m_1\dot{l}_4^2 + \frac{1}{2}\, m_2(\dot{l}_4 - \dot{l}_3)^2 + \frac{1}{2}\, m_3(\dot{l}_4 + \dot{l}_3)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\, m_4\dot{l}_4^2 + m_1g(c_1 - l_4) + m_2g(c_2 + l_4 - l_3) + m_3g(l_4 + l_3) + m_4gl_4 \qquad (3)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{l}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial l_3} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{l}_4}\right) - \frac{\partial L}{\partial l_4} = 0$$

Αντικαθιστώντας την (3) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

$$(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\ddot{l}_4 + (m_3 - m_2)\ddot{l}_3 - (m_4 - m_1 + m_2 + m_3)g = 0$$

$$(m_3 - m_2)\ddot{l}_4 + (m_2 + m_3)\ddot{l}_3 - (m_3 - m_2)g = 0$$

Λύνοντας ως προς τις επιταχύνσεις $\ddot{l}_3$ και $\ddot{l}_4$ βρίσκουμε ότι είναι ίσες με

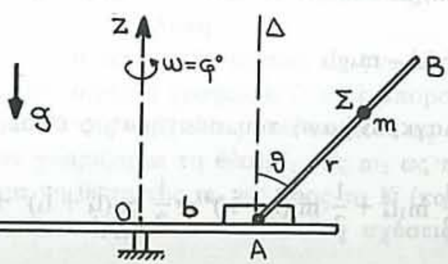
$$\ddot{l}_3 = \frac{2m_1(m_3 - m_2)}{(m_1 + m_4)(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} \cdot g$$

$$\ddot{l}_4 = \frac{(m_4 - m_1)(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}{(m_1 + m_4)(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} \cdot g$$

δηλαδή ότι είναι σταθερές.

**18)** Το οριζόντιο τραπέζι Π στο παρακάτω σχήμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον κατακόρυφο άξονα ΟΖ και το αβαρές ραβδί ΑΒ περιστρέφεται με γνωστό τρόπο $\vartheta = \vartheta(t)$ γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το Α. Το ραβδί ΑΒ βρίσκεται πάντοτε στο κατακόρυφο επίπεδο που ορίζεται από τις ΟΖ και ΑΔ και το υλικό σημείο Σ μπορεί να κινείται πάνω στην ΑΒ.

Λύση



Το υλικό σημείο Σ έχει ένα βαθμό ελευθερίας γιατί είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω στο ραβδί ΑΒ το οποίο κινείται με γνωστό τρόπο.

Οι άξονες X, Y του ακίνητου Καρτεσιανού συστήματος OXYZ βρίσκονται πάνω στο τραπέζι Π. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη τη θέση r = ΑΣ. Από το σχήμα προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των Καρτεσιανών συντεταγμένων του Σ ως προς τους άξονες OXYZ είναι

$$x = b\,\text{συν}\omega t + r\,\text{ημ}\vartheta\,\text{συν}\omega t, \quad y = b\,\text{ημ}\omega t + r\,\text{ημ}\vartheta\,\text{ημ}\omega t, \quad z = r\,\text{συν}\vartheta \quad (b \equiv OA) \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = -\omega(b + r\,\text{ημ}\vartheta)\text{ημ}\omega t + (\dot{r}\,\text{ημ}\vartheta + r\dot{\vartheta}\,\text{συν}\vartheta)\text{συν}\omega t$$

$$\dot{y} = \omega(b + r\,\text{ημ}\vartheta)\text{συν}\omega t + (\dot{r}\,\text{ημ}\vartheta + r\dot{\vartheta}\,\text{συν}\vartheta)\text{ημ}\omega t$$

$$\dot{z} = \dot{r}\,\text{συν}\vartheta - r\dot{\vartheta}\,\text{ημ}\vartheta$$

Η κινητική ενέργεια του Σ είναι

$$T = \frac{1}{2}\,m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\,m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + \omega^2(b + r\,\text{ημ}\vartheta)^2]$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του Σ είναι

$$V = mgz = mgr\,\text{συν}\vartheta$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του Σ είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\,m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + \omega^2(b + r\,\text{ημ}\vartheta)^2] - mgr\,\text{συν}\vartheta \qquad (2)$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας θα έχουμε μια εξίσωση Lagrange της μορφής

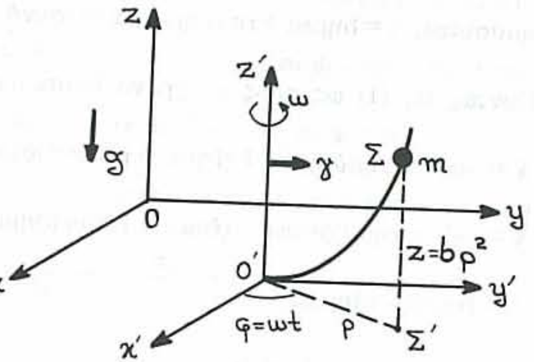
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην εξίσωση αυτή βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης του Σ είναι

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - \omega^2(b + r\,\text{ημ}\vartheta)\text{ημ}\vartheta + g\,\text{συν}\vartheta = 0$$

19) Η παραβολή $z = b\rho^2$ στο παρακάτω σχήμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον κατακόρυφο άξονα Ο΄Ζ΄ και ταυτόχρονα μετατοπίζεται κατά τη διεύθυνση του άξονα ΟΥ με σταθερή επιτάχυνση γ. Το υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω στην παραβολή.

Λύση




Το υλικό σημείο Σ έχει ένα βαθμό ελευθερίας γιατί κινείται πάνω στη γνωστή παραβολή $z = b\rho^2$. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη την $\rho = O'\Sigma'$. (Οι κινούμενοι άξονες Ο΄Χ΄Υ΄Ζ΄ είναι πάντοτε παράλληλοι προς τους ακίνητους άξονες ΟΧΥΖ). Από το σχήμα προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων του Σ είναι

$$x = \rho\sigma\upsilon\nu\omega t + x(O'),\quad y = \rho\eta\mu\omega t + \frac{1}{2}\gamma t^2 + y(O'),\quad z = b\rho^2 \qquad (1)$$

όπου $x(O'), y(O')$ είναι οι συντεταγμένες του Ο΄ για $t = 0$.

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = -\rho\omega\eta\mu\omega t + \dot{\rho}\sigma\upsilon\nu\omega t,\quad \dot{y} = \rho\omega\sigma\upsilon\nu\omega t + \dot{\rho}\eta\mu\omega t + \gamma t,\quad \dot{z} = 2b\rho\dot{\rho}$$

Η κινητική ενέργεια του Σ είναι

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \omega^2\rho^2 + \gamma^2 t^2 + 2\dot{\rho}\gamma t\eta\mu\omega t + 2\omega\rho\gamma t\sigma\upsilon\nu\omega t +$$
$$+ 4b^2\rho^2\dot{\rho}^2]$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του Σ είναι

$$V = mgz = mgb\rho^2$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του Σ είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m[\dot{\rho}^2 + \omega^2\rho^2 + \gamma^2 t^2 + 2\dot{\rho}\gamma t\eta\mu\omega t + 2\omega\rho\gamma t\sigma\upsilon\nu\omega t + 4b^2\rho^2\dot{\rho}^2] -$$

$$- mgb\rho^2 \qquad (2)$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

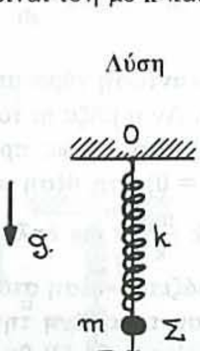
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην εξίσωση αυτή βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης του Σ είναι

$$(1 + 4b^2\rho^2)\ddot{\rho} + 4b^2\rho\dot{\rho}^2 + (2gb - \omega^2)\rho + \gamma\eta\mu\omega t = 0$$

**20)** Η μάζα m στο παρακάτω σχήμα είναι υποχρεωμένη να κινείται πάνω στον κατακόρυφο άξονα ΟΖ. Το άκρο Ο του ελατηρίου είναι σταθερό, η σταθερή του είναι ίση με k και το φυσικό μήκος του είναι ίσο με l.

Λύση




Η μάζα m έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη την $z = O\Sigma$. Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m\dot{z}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της m είναι $-mgz$ και η δυναμική ενέργεια της m λόγω της τάσης του ελατηρίου είναι

$$\frac{1}{2}\, k(z-l)^2$$

Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m\dot{z}^2 + mgz - \frac{1}{2}\, k(z-l)^2 \tag{1}$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας, θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

Αντικαθιστώντας την (1) στην εξίσωση αυτή βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης της m είναι

$$\ddot{z} + \omega^2 z - \rho = 0 \qquad (\text{όπου } \omega^2 = \frac{k}{m} \text{ και } \rho = g + \omega^2 l) \tag{2}$$

δηλαδή η m κάνει αρμονική ταλάντωση γύρω από το σημείο $z_0 = \rho/\omega^2$ με κυκλική συχνότητα ίση προς ω. Αν η μάζα m τοποθετηθεί στη θέση $z_0$ με ταχύτητα ίση με μηδέν ($\dot{z} = 0$) τότε, όπως προκύπτει από την (2), θα ισορροπήσει μόνιμα ($\dot{z}(t) = \ddot{z}(t) = 0$) στη θέση αυτή. Στη θέση $z_0$ η έλξη του ελατηρίου είναι $k(z_0 - l) = k\,\dfrac{mg}{k} = mg$ δηλαδή αντισταθμίζει εντελώς το βάρος της m. Η θέση $z_0$ ονομάζεται «θέση στατικής ισορροπίας» της m. Αν διαλέγαμε ως γενικευμένη συντεταγμένη την απομάκρυνση $x = z - z_0$ της μάζας από τη θέση ισορροπίας $z_0$, η (2) θα έπαιρνε την απλή μορφή

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

• 21) Οι μάζες $m_1$ και $m_2$ στο παρακάτω σχήμα είναι υποχρεωμένες να κινούνται πάνω στον κατακόρυφο άξονα OZ.

Λύση

Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις αποστάσεις $z_1$ και $z_2$ των $m_1$ και $m_2$ αντίστοιχα από το O. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2} m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\dot{z}_2^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$-m_1gz_1 - m_2gz_2$$

και η δυναμική ενέργεια τάσης των ελατηρίων είναι

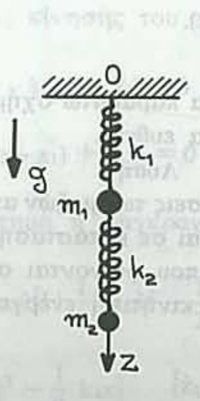
$$\frac{1}{2} k_1(z_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2} k_2(z_2 - z_1 - l_2)^2$$

(όπου $k_1$, $k_2$ και $l_1$, $l_2$ είναι αντίστοιχα οι σταθερές και τα φυσικά μήκη των ελατηρίων) επειδή η μεταβολή του μήκους του πρώτου ελατήριου είναι ίση με $z_1 - l_1$ και του δεύτερου ελατήριου ίση με $z_2 - z_1 - l_2$.

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\dot{z}_2^2 + m_1gz_1 + m_2gz_2 - \frac{1}{2} k_1(z_1 - l_1)^2 -$$

$$- \frac{1}{2} k_2(z_2 - z_1 - l_2)^2 \qquad (1)$$



Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_1} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_2} = 0$$

Αντικαθιστώντας την (1) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης των $m_1$ και $m_2$ είναι

$$\begin{aligned} & m_1\ddot{z}_1 + k_1(z_1 - l_1) - k_2(z_2 - z_1 - l_2) - m_1 g = 0 \\ & m_2\ddot{z}_2 + k_2(z_2 - z_1 - l_2) - m_2 g = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Οι θέσεις ισορροπίας $z_1^*$, $z_2^*$ των $m_1$, $m_2$ βρίσκονται από τις (2) αν μηδενίσουμε τις επιταχύνσεις $\ddot{z}_1$, $\ddot{z}_2$, δηλ. ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} & k_1(z_1^* - l_1) - k_2(z_2^* - z_1^* - l_2) - m_1 g = 0 \\ & k_2(z_2^* - z_1^* - l_2) - m_2 g = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Αν διαλέγαμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις απομακρύνσεις $x_1 = z_1 - z_1^*$, $x_2 = z_2 - z_2^*$ των μαζών από τις θέσεις ισορροπίας τους, οι εξισώσεις (2) θα έπαιρναν την απλή μορφή

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

Η μορφή αυτή προκύπτει από την αντικατάσταση των $z_1 = z_1^* + x_1$, $z_2 = z_2^* + x_2$ και των (3) στις (2).

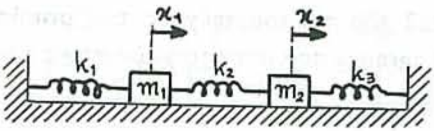
22) Οι μάζες $m_1$, $m_2$, $m_3$ στα παρακάτω σχήματα είναι υποχρεωμένες να κινούνται πάνω σε οριζόντια ευθεία.

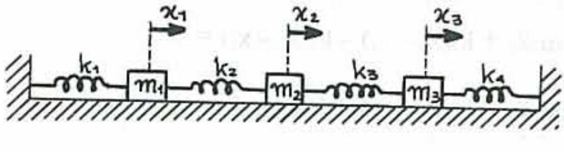
Λύση

Έστω $x_1$, $x_2$, $x_3$ οι απομακρύνσεις των μαζών από τις θέσεις εκείνες στις οποίες τα ελατήρια δε βρίσκονται σε κατάσταση τάσης (φυσικές θέσεις). Οι φυσικές θέσεις είναι αυτές που φαίνονται στα σχήματα.

Για το πρώτο σύστημα, η κινητική ενέργεια είναι

$$T = \frac{1}{2} m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\dot{x}_2^2$$




και η δυναμική ενέργεια τάσης των ελατηρίων είναι

$$V = \frac{1}{2}\, k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}\, k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}\, k_3 x_2^2$$

(βλέπε στη σελ. 122 του πρώτου τεύχους των ασκήσεων).

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}\, k_1 x_1^2 - \frac{1}{2}\, k_2 (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}\, k_3 x_2^2 \tag{1}$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας $(x_1, x_2)$, θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

Αντικαθιστώντας την (1) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του πρώτου συστήματος είναι

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 x_2 = 0$$

Για το δεύτερο σύστημα η Λαγκρανζιανή είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\, m_3 \dot{x}_3^2 - \frac{1}{2}\, k_1 x_1^2 - \frac{1}{2}\, k_2 (x_2 - x_1)^2 -$$

$$- \frac{1}{2}\, k_3 (x_3 - x_2)^2 - \frac{1}{2}\, k_4 x_3^2 \tag{2}$$

(βλέπε στη σελ. 122 του πρώτου τεύχους των ασκήσεων).

Οι εξισώσεις Lagrange που αντιστοιχούν στους τρεις βαθμούς ελευθερίας γίνονται τελικά

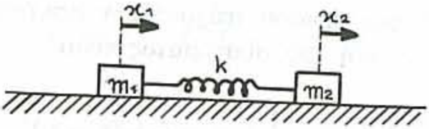
$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_3 - x_2) = 0$$

$$m_3\ddot{x}_3 + k_3(x_3 - x_2) + k_4x_3 = 0$$

• 23) Οι μάζες $m_1$, $m_2$, $m_3$ στα παρακάτω σχήματα είναι υποχρεωμένες να κινούνται πάνω σε οριζόντια ευθεία.

Λύση




Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις απομακρύνσεις $x_1$, $x_2$ των μαζών από τις θέσεις εκείνες στις οποίες το ελατήριο δε βρίσκεται σε κατάσταση τάσης (φυσικές θέσεις). Η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k(x_2 - x_1)^2 \qquad (1)$$

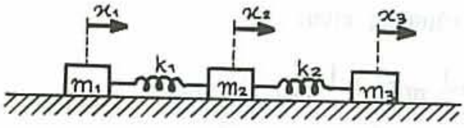
(βλέπε στη σελ. 123 του πρώτου τεύχους των ασκήσεων).

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας ($x_1$, $x_2$), θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

Αντικαθιστώντας την (1) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

$$m_1\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$




Το σύστημα αυτό έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας. Η Λαγκρανζιανή του είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\, m_3\dot{x}_3^2 - \frac{1}{2}\, k_1(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}\, k_2(x_3 - x_2)^2$$

(βλέπε στη σελ. 123 του πρώτου τεύχους των ασκήσεων).
Επομένως, οι εξισώσεις Lagrange που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες $x_1$, $x_2$, $x_3$ γίνονται τελικά

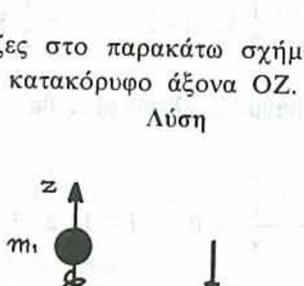
$$m_1\ddot{x}_1 - k_1(x_2 - x_1) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2) = 0$$

$$m_3\ddot{x}_3 + k_2(x_3 - x_2) = 0$$

**24)** Οι τρεις μάζες στο παρακάτω σχήμα είναι υποχρεωμένες να κινούνται πάνω στον κατακόρυφο άξονα OZ.

Λύση




Το σύστημα έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τα ύψη $z_1$, $z_2$, $z_3$ των μαζών. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2} m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} m_3\dot{z}_3^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$m_1gz_1 + m_2gz_2 + m_3gz_3$$

και η δυναμική ενέργεια τάσης των ελατηρίων είναι

$$\frac{1}{2} k_1(z_1 - z_2 - l_1)^2 + \frac{1}{2} k_2(z_2 - z_3 - l_2)^2$$

(όπου $k_1$, $k_2$ και $l_1$, $l_2$ είναι αντίστοιχα οι σταθερές και τα φυσικά μήκη των ελατηρίων) επειδή η μεταβολή του μήκους κάθε ελατηρίου είναι $z_1 - z_2 - l_1$ και $z_2 - z_3 - l_2$ αντίστοιχα. Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} m_3\dot{z}_3^2 - m_1gz_1 - m_2gz_2 -$$

$$- m_3gz_3 - \frac{1}{2} k_1(z_1 - z_2 - l_1)^2 - \frac{1}{2} k_2(z_2 - z_3 - l_2)^2 \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε τρεις βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε τρεις εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ 3$$

Αντικαθιστώντας την (1) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

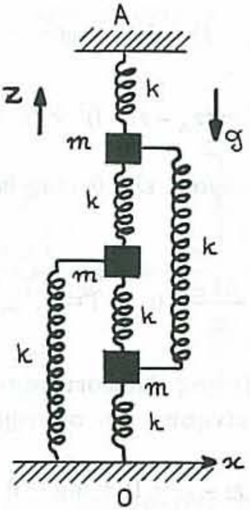
$$m_1\ddot{z}_1 + k_1(z_1 - z_2 - l_1) + m_1g = 0$$

$$m_2\ddot{z}_2 - k_1(z_1 - z_2 - l_1) + k_2(z_2 - z_3 - l_2) + m_2g = 0$$

$$m_3\ddot{z}_3 - k_2(z_2 - z_3 - l_2) + m_3g = 0$$

25) Οι τρεις μάζες στο παρακάτω σχήμα είναι υποχρεωμένες να κινούνται πάνω στον κατακόρυφο άξονα OZ. Οι μάζες είναι ίσες μεταξύ τους και τα ελατήρια έχουν τις ίδιες σταθερές k και τα ίδια φυσικά μήκη l.

Λύση




Το σύστημα έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τα ύψη $z_1$, $z_2$, $z_3$ όπου $z_1$ είναι η θέση της κατώτερης μάζας και $z_3$ της ανώτερης. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}\, m\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}\, m\dot{z}_3^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$mgz_1 + mgz_2 + mgz_3$$

και η δυναμική ενέργεια τάσης των ελατηρίων είναι

$$\frac{1}{2}\, k(z_1 - l)^2 + \frac{1}{2}\, k(z_2 - z_1 - l)^2 + \frac{1}{2}\, k(z_3 - z_2 - l)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\, k(z_A - z_3 - l)^2 + \frac{1}{2}\, k(z_2 - l)^2 + \frac{1}{2}\, k(z_3 - z_1 - l)^2$$

επειδή οι μεταβολές των μηκών των ελατηρίων είναι: πρώτο (από κάτω) ελατήριο $\Delta l = z_1 - l$ δεύτερο ελατήριο $\Delta l = z_2 - z_1 - l$, τρίτο $\Delta l = z_3 - z_2 - l$, τέταρτο (ανώτερο) $\Delta l = z_A - z_3 - l$, αριστερό ελατήριο $\Delta l = z_2 - l$, δεξιό ελατήριο $\Delta l = z_3 - z_1 - l$ όπου $z_A$ είναι η σταθερή απόσταση OA.

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2) - mg(z_1 + z_2 + z_3) - \frac{1}{2}\, k[(z_1 - l)^2 +$$

$$+ (z_2 - z_1 - l)^2 + (z_3 - z_2 - l)^2 + (z_A - z_3 - l)^2 + (z_2 - l)^2 + (z_3 - z_1 - l)^2] \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε τρεις βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε τρεις εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ 3$$

Αντικαθιστώντας την (1) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

$$m\ddot{z}_1 + k(3z_1 - z_2 - z_3 + l) + mg = 0$$

$$m\ddot{z}_2 + k(3z_2 - z_1 - z_3 - l) + mg = 0 \qquad (2)$$

$$m\ddot{z}_3 + k(3z_3 - z_1 - z_2 - l) + mg = 0$$

Οι θέσεις ισορροπίας $z_i^*$ των μαζών $m_i$ βρίσκονται από τις (2) αν μηδενίσουμε τις επιταχύνσεις, δηλ. ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$k(3z_1^* - z_2^* - z_3^* + l) + mg = 0$$

$$k(3z_2^* - z_1^* - z_3^* - l) + mg = 0 \qquad (3)$$

$$k(3z_3^* - z_1^* - z_2^* - l) + mg = 0$$

Αν διαλέγαμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις απομακρύνσεις $x_i = z_i - z_i^*$ των μαζών $m_i$ από τις θέσεις ισορροπίας τους, τότε κάνοντας την αντικατάσταση $z_i = x_i + z_i^*$ και παίρνοντας υπόψη τις (3), οι εξισώσεις (2) θα έπαιρναν την απλή μορφή

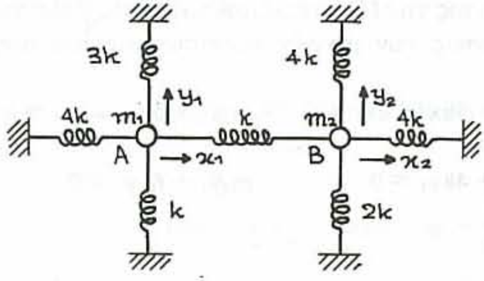
$$m\ddot{x}_1 + k(3x_1 - x_2 - x_3) = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + k(3x_2 - x_1 - x_3) = 0$$

$$m\ddot{x}_3 + k(3x_3 - x_1 - x_2) = 0$$

26) Οι μάζες και τα ελατήρια στο παρακάτω σχήμα βρίσκονται πάντοτε πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο. Τα άκρα των ελατηρίων είναι σταθερά. Οι μάζες κάνουν μικρές ταλαντώσεις γύρω από τις φυσικές θέσεις Α και Β.

Λύση




Το σύστημα έχει τέσσερις βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις καρτεσιανές συνιστώσες $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ των μετατοπίσεων των μαζών από τις φυσικές τους θέσεις (ελατήρια χωρίς τάση στις θέσεις Α και Β). Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}\, m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

Επειδή το πλάτος των ταλαντώσεων είναι πολύ μικρό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι κατακόρυφες μετατοπίσεις $y_1$ και $y_2$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επομένως η δυναμική ενέργεια τάσης των ελατηρίων είναι

$$V = \frac{1}{2}\, 4kx_1^2 + \frac{1}{2}\, k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}\, 4kx_2^2 + \frac{1}{2}\, 3ky_1^2 + \frac{1}{2}\, ky_1^2 + \frac{1}{2}\, 4ky_2^2 + \frac{1}{2}\, 2ky_2^2$$

ή

$$V = \frac{5k}{2}\,(x_1^2 + x_2^2) + 2ky_1^2 + 3ky_2^2 - kx_1x_2$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}\, m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{5k}{2}\,(x_1^2 + x_2^2) - 2ky_1^2 - 3ky_2^2 +$$
$$+ kx_1x_2 \tag{1}$$

Επειδή έχουμε τέσσερις βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε τέσσερις εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0 \qquad i = 1,\ 2$$

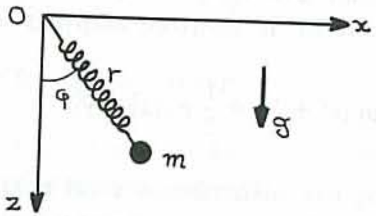
Αντικαθιστώντας την (1) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις των μικρών ταλαντώσεων του συστήματος είναι

$$m_1\ddot{x}_1 + 5kx_1 - kx_2 = 0 \qquad m_2\ddot{x}_2 + 5kx_2 - kx_1 = 0$$

$$m_1\ddot{y}_1 + 4ky_1 = 0 \qquad m_2\ddot{y}_2 + 6ky_2 = 0$$

• 27) Η μάζα m στο παρακάτω σχήμα κινείται πάνω στο κατακόρυφο επίπεδο XOZ.

Λύση




Η μάζα m έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις r, φ. Οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων της m είναι

$$x = r\eta\mu\varphi, \qquad z = r\sigma\upsilon\nu\varphi \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = \dot{r}\eta\mu\varphi + r\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi, \qquad \dot{z} = \dot{r}\sigma\upsilon\nu\varphi - r\dot{\varphi}\eta\mu\varphi$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της m είναι

$$-mgz = -mgr\sigma\upsilon\nu\varphi$$

και η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$\frac{1}{2}\,k(r-l)^2$$

όπου l είναι το φυσικό μήκος του και k η σταθερή του.
΄Αρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\,m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{1}{2}\,k(r-l)^2 \tag{2}$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Αντικαθιστώντας την (2) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης της m είναι

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + k(r-l) - mg\sigma\upsilon\nu\varphi = 0$$

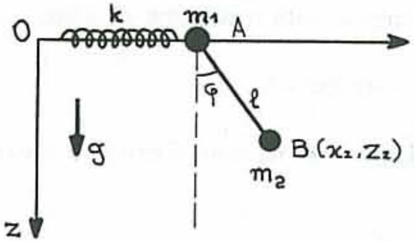
$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + g\eta\mu\varphi = 0$$

• 28) Η μάζα $m_1$ στο παρακάτω σχήμα είναι υποχρεωμένη να κινείται πάνω στον οριζόντιο άξονα OX και η $m_2$ πάνω στο κατακόρυφο επίπεδο XOZ. Να εξεταστεί και η περίπτωση που η $m_1$ είναι υποχρεωμένη να κινείται πάνω στον κατακόρυφο άξονα OZ.

Λύση

Υπάρχουν δύο δεσμοί, οι $z_1 = 0$, $AB = \sigma\tau\alpha\theta. \equiv l$. ΄Αρα το σύστημα των $m_1$ και $m_2$ έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις $x_1 = OA$, φ. Από το σχήμα και από τις εξισώσεις των δεσμών προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων της $m_2$ είναι

$$x_2 = x_1 + l\eta\mu\varphi, \qquad z_2 = l\sigma\upsilon\nu\varphi \tag{1}$$




Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi, \qquad \dot{z}_2 = -l\dot{\varphi}\eta\mu\varphi$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2}\, m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2(\dot{x}_1^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$-m_2 g z_2 = -m_2 g l\sigma\upsilon\nu\varphi$$

και η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$\frac{1}{2}\, k(x_1 - l_0)^2$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2(\dot{x}_1^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi) + m_2 g l\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{1}{2}\, k(x_1 - l_0)^2 \qquad (2)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Αντικαθιστώντας την (2) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι·

διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l\ddot{\varphi}\,\text{συν}\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\,\text{ημ}\varphi + k(x_1 - l_0) = 0 \\ &l\ddot{\varphi} + \ddot{x}_1\,\text{συν}\varphi + g\,\text{ημ}\varphi = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Στην περίπτωση που η $m_1$ κινείται πάνω στον OZ οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων της $m_2$ είναι

$$x_2 = l\,\text{ημ}\varphi, \qquad z_2 = z_1 + l\,\text{συν}\varphi \tag{1΄}$$

Παραγωγίζοντας τις (1΄) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x}_2 = l\dot{\varphi}\,\text{συν}\varphi, \qquad \dot{z}_2 = \dot{z}_1 - l\dot{\varphi}\,\text{ημ}\varphi$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

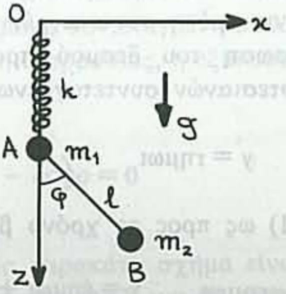
$$T = \frac{1}{2}\,m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2}\,m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2(\dot{z}_1^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2l\dot{z}_1\dot{\varphi}\,\text{ημ}\varphi)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$-m_1 g z_1 - m_2 g z_2 = -m_1 g z_1 - m_2 g(z_1 + l\,\text{συν}\varphi)$$

και η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$\frac{1}{2}\,k(z_1 - l_0)^2$$



Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{z}_1^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2l\dot{z}_1\dot{\varphi}\eta\mu\varphi) + m_2g(z_1 + l\sigma\upsilon\nu\varphi) + m_1gz_1 -$$

$$-\frac{1}{2}k(z_1 - l_0)^2$$

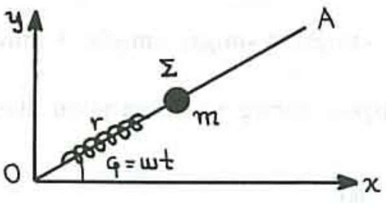
Αντικαθιστώντας την (2΄) στις εξισώσεις Lagrange ως προς $z_1$ και $\varphi$ βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

$$(m_1 + m_2)\ddot{z}_1 - m_2l\ddot{\varphi}\eta\mu\varphi - m_2l\dot{\varphi}^2\sigma\upsilon\nu\varphi + k(z_1 - l_0) - (m_1 + m_2)g = 0$$

$$l\ddot{\varphi} - \ddot{z}_1\eta\mu\varphi + g\eta\mu\varphi = 0$$

29) Το ραβδί ΟΑ στο παρακάτω σχήμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον κατακόρυφο άξονα ΟΖ. Η μάζα m είναι υποχρεωμένη να κινείται πάνω στην ΟΑ.

Λύση




Υπάρχει ένας δεσμός, ο $\varphi = \omega t$. Άρα η m έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη την $r = $ ΟΣ. Από το σχήμα και από την εξίσωση του δεσμού προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των Καρτεσιανών συντεταγμένων της m είναι

$$x = r\sigma\upsilon\nu\omega t, \qquad y = r\eta\mu\omega t \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = \dot{r}\sigma\upsilon\nu\omega t - \omega r\eta\mu\omega t, \qquad \dot{y} = \dot{r}\eta\mu\omega t + \omega r\sigma\upsilon\nu\omega t$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2)$$

Η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$V = \frac{1}{2}\, k(r - l)^2$$

Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) - \frac{1}{2}\, k(r - l)^2 \qquad (2)$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην εξίσωση αυτή βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης της m είναι

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r + k(r - l) = 0 \qquad (3)$$

Μηδενίζοντας την επιτάχυνση $\ddot{r}$ βρίσκουμε από την (3) ότι η θέση ισορροπίας $r^*$ της m ικανοποιεί την εξίσωση

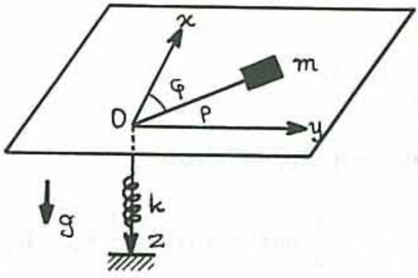
$$-m\omega^2 r^* + k(r^* - l) = 0 \qquad (4)$$

Αν ως νέα γενικευμένη συντεταγμένη διαλέξουμε την εκτροπή $\rho = r - r^*$ της m από τη θέση ισορροπίας, η εξίσωση (3) παίρνει, με τη βοήθεια της (4), τη μορφή

$$\ddot{\rho} + \Big(\frac{k}{m} - \omega^2\Big)\rho = 0$$

• **30)** Η μάζα m στο παρακάτω σχήμα είναι υποχρεωμένη να κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο ΟΧΥ και βρίσκεται στην άκρη ενός νήματος το οποίο περνάει από την τρύπα Ο του επίπεδου ΟΧΥ και συνδέεται με το κατακόρυφο ελατήριο. Το νήμα είναι αβαρές και μη-εκτατό και όταν η m βρίσκεται στην τρύπα O το ελατήριο δεν έχει τάση.

Λύση




Υπάρχει ένας δεσμός, ο $z = 0$. Ἀρα η m έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις πολικές συντεταγμένες ρ, φ της m ως προς το O. Η κινητική ενέργεια της m σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2)$$

Η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$V = \frac{1}{2}\, k\rho^2$$

επειδή η μεταβολή του μήκους του ελατηρίου (από το φυσικό του μήκος) είναι ίση με ρ. Ἀρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}\, k\rho^2 \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

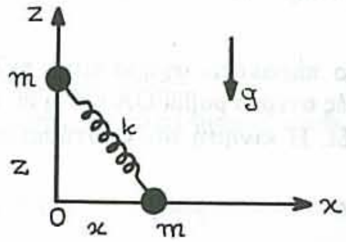
Αντικαθιστώντας την (1) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της m είναι

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + k\rho = 0$$

$$m\rho^2\dot{\varphi} = \text{σταθ.} \qquad (\text{επειδή } \partial L/\partial\varphi = 0)$$

31) Οι δύο όμοιες μάζες στο παρακάτω σχήμα κινούνται πάνω στους άξονες ΟΧ και ΟΖ αντίστοιχα του κατακόρυφου επιπέδου ΟΧΖ. Το ελατήριο έχει φυσικό μήκος l.

Λύση




Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις x, z όπως φαίνεται στο σχήμα. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, m\dot{z}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$mgz$$

και η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$\frac{1}{2}\, k[\sqrt{z^2 + x^2} - l]^2$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz - \frac{1}{2}\, k[\sqrt{z^2 + x^2} - l]^2 \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

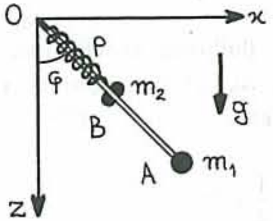
Αντικαθιστώντας την (1) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

$$m\ddot{x} + k[1 - l/\sqrt{x^2 + z^2}]x = 0$$

$$m\ddot{z} + mg + k[1 - l/\sqrt{x^2 + z^2}]z = 0$$

32) Η μάζα $m_1$ στο παρακάτω σχήμα είναι ακλόνητα τοποθετημένη στην άκρη από το αβαρές στερεό ραβδί ΟΑ και η $m_2$ είναι υποχρεωμένη να κινείται πάνω στο ραβδί. Η κίνηση του συστήματος γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο ΟΧΖ.

Λύση




Υπάρχουν δύο δεσμοί, οι ΟΑ = σταθ. ≡ l και $\varphi_B = \varphi_A \equiv \varphi$. Επομένως το σύστημα των $m_1$ και $m_2$ έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις πολικές συντεταγμένες ρ, φ της $m_2$ ως προς το Ο. Από το σχήμα και από τις εξισώσεις των δεσμών προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων των $m_1$ και $m_2$ είναι

$$x_1 = l\eta\mu\varphi, \qquad z_1 = l\sigma\upsilon\nu\varphi, \qquad x_2 = \rho\eta\mu\varphi, \qquad z_2 = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x}_1 = l\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad \dot{z}_1 = -l\dot{\varphi}\eta\mu\varphi, \quad \dot{x}_2 = \dot{\rho}\eta\mu\varphi + \rho\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad \dot{z}_2 = \dot{\rho}\sigma\upsilon\nu\varphi - \rho\dot{\varphi}\eta\mu\varphi$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}\, m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}\, m_1 l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\, m_2(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$-m_1 g z_1 - m_2 g z_2 = -m_1 g l συνφ - m_2 g ρ συνφ$$

και η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$\frac{1}{2}\, k(\rho - l_0)^2$$

όπου $l_0$ είναι το φυσικό του μήκος.

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + m_1 g l συνφ + m_2 g ρ συνφ - \frac{1}{2} k(\rho - l_0)^2 \quad (2)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

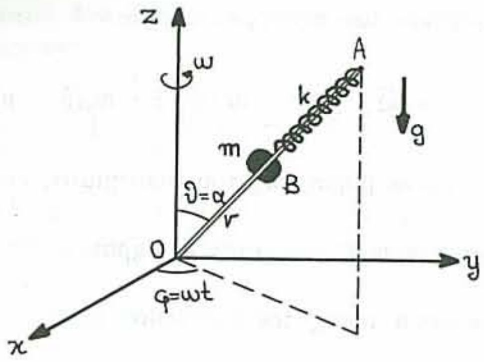
Αντικαθιστώντας την (2) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

$$m_2\ddot{\rho} - m_2\rho\dot{\varphi}^2 - m_2 g συνφ + k(\rho - l_0) = 0$$

$$(m_1 l^2 + m_2\rho^2)\ddot{\varphi} + 2m_2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + (m_1 l + m_2\rho) g ημφ = 0$$

33) Η μάζα m στο παρακάτω σχήμα είναι υποχρεωμένη να κινείται πάνω στο αβαρές στερεό ραβδί ΟΑ το οποίο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον κατακόρυφο άξονα ΟΖ σχηματίζοντας με αυτόν σταθερή γωνία α. Το άκρο Α του ελατηρίου έχει συνδεθεί ακλόνητα με το ραβδί.

Λύση




Υπάρχουν δύο δεσμοί, οι $\varphi = \omega t$ και $\vartheta = \alpha$. Επομένως η μάζα m έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη την $r = OB$. Από το σχήμα και από τις εξισώσεις των δεσμών προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων της m είναι

$$x = r\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\omega t, \quad y = r\eta\mu\alpha\,\eta\mu\omega t, \quad z = r\sigma\upsilon\nu\alpha \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = \dot{r}\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\omega t - r\omega\eta\mu\alpha\eta\mu\omega t, \quad \dot{y} = \dot{r}\eta\mu\alpha\eta\mu\omega t + r\omega\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\omega t, \quad \dot{z} = \dot{r}\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\,m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\,m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\eta\mu^2\alpha)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της m είναι

$$mgz = mgr\sigma\upsilon\nu\alpha$$

και η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$\frac{1}{2}\,k(b - r - l_0)^2$$

όπου $b = OA$ και $l_0$ είναι φυσικό μήκος του ελατηρίου.

Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\,m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\eta\mu^2\alpha) - mgr\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{1}{2}\,k(b - r - l_0)^2 \qquad (2)$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

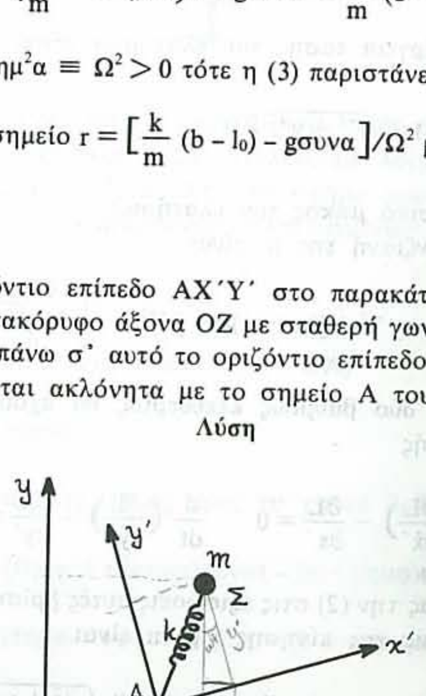
Αντικαθιστώντας την (2) στην εξίσωση αυτή βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης της m είναι

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \eta\mu^2\alpha\right) r + g\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{k}{m}(b - l_0) = 0 \quad (3)$$

Εάν $\frac{k}{m} - \omega^2\eta\mu^2\alpha \equiv \Omega^2 > 0$ τότε η (3) παριστάνει αρμονική ταλάντωση γύρω από το σημείο $r = \left[\frac{k}{m}(b - l_0) - g\sigma\upsilon\nu\alpha\right]/\Omega^2$ με κυκλική συχνότητα ίση προς Ω.

34) Το οριζόντιο επίπεδο ΑΧ΄Υ΄ στο παρακάτω σχήμα στρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα ΟΖ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Η μάζα m κινείται πάνω σ' αυτό το οριζόντιο επίπεδο και το άκρο Α του ελατηρίου συνδέεται ακλόνητα με το σημείο Α του επιπέδου ΑΧ΄Υ΄.

Λύση




Η μάζα m έχει δύο βαθμούς ελευθερίας επειδή κινείται χωρίς δεσμούς πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις καρτεσιανές συντεταγμένες x΄, y΄ της m ως προς τους στρεφόμενους άξονες ΑΧ΄Υ΄. Από το σχήμα προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων x, y (ως προς τους ΟΧΥ) της m είναι

$$x = (\alpha + x')\sigma\upsilon\nu\omega t - y'\eta\mu\omega t, \qquad y = (\alpha + x')\eta\mu\omega t + y'\sigma\upsilon\nu\omega t \quad (\alpha = O\grave{A}) \quad (1)$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = (\dot{x}' - \omega y')\text{συν}\omega t - [(\alpha + x')\omega + \dot{y}']\text{ημ}\omega t$$

$$\dot{y} = (\dot{x}' - \omega y')\text{ημ}\omega t + [(\alpha + x')\omega + \dot{y}']\text{συν}\omega t$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}\, m\{(\dot{x}' - \omega y')^2 + [(\alpha + x')\omega + \dot{y}']^2\}$$

Η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατήριου είναι

$$V = \frac{1}{2}\, k(\sqrt{x'^2 + y'^2} - l)^2$$

όπου l είναι το φυσικό μήκος του ελατήριου.

Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m\{(\dot{x}' - \omega y')^2 + [(\alpha + x')\omega + \dot{y}']^2\} - \frac{1}{2}\, k(\sqrt{x'^2 + y'^2} - l)^2 \qquad (2)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}\right) - \frac{\partial L}{\partial x'} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

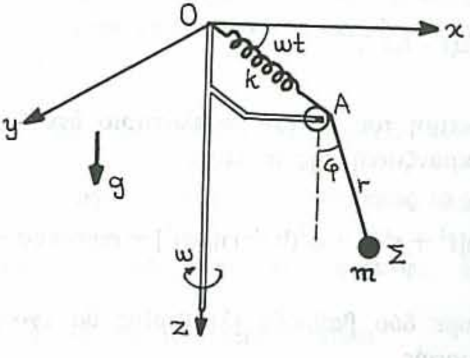
Αντικαθιστώντας την (2) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης της m είναι

$$m\ddot{x}' - 2m\omega\dot{y}' - m(\alpha + x')\omega^2 + k(1 - l/\sqrt{x'^2 + y'^2})x' = 0$$

$$m\ddot{y}' + 2m\omega\dot{x}' - my'\omega^2 + k(1 - l/\sqrt{x'^2 + y'^2})y' = 0$$

35) Ο κατακόρυφος άξονας ΟΖ στο παρακάτω σχήμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω και η μάζα m είναι υποχρεωμένη να κινείται πάνω στο περιστρεφόμενο κατακόρυφο επίπεδο ΟΖΑ δεμένη με ένα μη εκτατό νήμα το οποίο περνάει από τη μικρή τροχαλία Α και καταλήγει στο ελατήριο k το οποίο συνδέεται με τον άξονα στο ακλόνητο σημείο Ο.

Λύση




Η μάζα m έχει δύο βαθμούς ελευθερίας επειδή είναι υποχρεωμένη να κινείται πάνω στο επίπεδο ΟΖΑ. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις r = ΑΖ, φ. Από το σχήμα προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων της m είναι

$$x = (b + r\eta\mu\varphi)\sigma\upsilon\nu\omega t$$

$$y = (b + r\eta\mu\varphi)\eta\mu\omega t \qquad (b = OA) \tag{1}$$

$$z = r\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x} = (\dot{r}\eta\mu\varphi + r\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi)\sigma\upsilon\nu\omega t - (b + r\eta\mu\varphi)\omega\eta\mu\omega t$$

$$\dot{y} = (\dot{r}\eta\mu\varphi + r\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi)\eta\mu\omega t + (b + r\eta\mu\varphi)\omega\sigma\upsilon\nu\omega t$$

$$\dot{z} = \dot{r}\sigma\upsilon\nu\varphi - r\dot{\varphi}\eta\mu\varphi$$

Η κινητική ενέργεια της m είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\, m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \omega^2(b + r\eta\mu\varphi)^2]$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της m είναι

$$-mgz = -mgr\sigma\upsilon\nu\varphi$$

και η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$\frac{1}{2}\, k(r - r_0)^2$$

όπου $r_0$ είναι η τιμή του $r$ όταν το ελατήριο δεν έχει τάση.

Άρα η Λαγκρανζιανή της m είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \omega^2(b + r\eta\mu\varphi)^2] + mgr\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{1}{2}\, k(r - r_0)^2 \quad (2)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

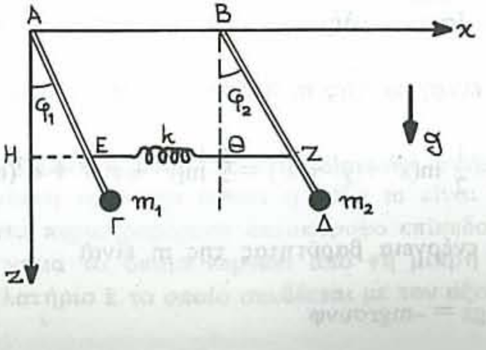
Αντικαθιστώντας την (2) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης της m είναι

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - m\omega^2(b + r\eta\mu\varphi)\eta\mu\varphi - mg\sigma\upsilon\nu\varphi + k(r - r_0) = 0$$

$$mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} - m\omega^2 r(b + r\eta\mu\varphi)\sigma\upsilon\nu\varphi + mgr\eta\mu\varphi = 0$$

36) Τα εκκρεμή στο παρακάτω σχήμα κάνουν μικρές ταλαντώσεις στο κατακόρυφο επίπεδο ΑΧΖ γύρω από τη θέση ισορροπίας. Στη θέση ισορροπίας τα εκκρεμή είναι κατακόρυφα και το ελατήριο σύζευξης δεν έχει τάση. Τα ραβδιά ΑΓ και ΒΔ δεν έχουν βάρος.

Λύση



Το σύστημα των $m_1$ και $m_2$ έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες $\varphi_1$ και $\varphi_2$. Από το σχήμα προκύπτει ότι οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων των $m_1$ και $m_2$ είναι

$$x_1 = l\eta\mu\varphi_1, \quad z_1 = l\sigma\upsilon\nu\varphi_1, \quad x_2 = l\eta\mu\varphi_2, \quad z_2 = l\sigma\upsilon\nu\varphi_2 \qquad (1)$$

όπου $l = \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{B\Delta}$. Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x}_1 = l\dot{\varphi}_1\sigma\upsilon\nu\varphi_1, \quad \dot{z}_1 = -l\dot{\varphi}_1\eta\mu\varphi_1, \quad \dot{x}_2 = l\dot{\varphi}_2\sigma\upsilon\nu\varphi_2, \quad \dot{z}_2 = -l\dot{\varphi}_2\eta\mu\varphi_2$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}\, m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2}\, m_1 l^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 l^2\dot{\varphi}_2^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$-m_1 g z_1 - m_2 g z_2 = -m_1 g l\sigma\upsilon\nu\varphi_1 - m_2 g l\sigma\upsilon\nu\varphi_2$$

Επειδή οι γωνίες $\varphi_1$ και $\varphi_2$ είναι πολύ μικρές μπορούμε να γράψουμε

$$\sigma\upsilon\nu\varphi_1 \simeq 1 - \varphi_1^2/2, \quad \sigma\upsilon\nu\varphi_2 \simeq 1 - \varphi_2^2/2$$

οπότε η δυναμική ενέργεια βαρύτητας γίνεται

$$-m_1 g l(1 - \varphi_1^2/2) - m_2 g l(1 - \varphi_2^2/2)$$

Η συνολική μεταβολή του μήκους του ελατήριου είναι κατά προσέγγιση ίση με

$$\Theta Z - HE = \alpha\varphi_2 - \alpha\varphi_1 = \alpha(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (\alpha = AE = BZ)$$

οπότε η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατήριου είναι

$$\frac{1}{2}\, k\alpha^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

΄Αρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_1 g l(1 - \varphi_1^2/2) + m_2 g l(1 - \varphi_2^2/2) -$$

$$- \frac{1}{2} k\alpha^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \qquad (2)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0 \qquad i = 1,\ 2$$

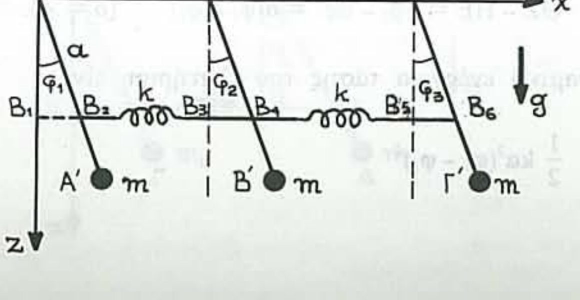
Αντικαθιστώντας την (2) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις των μικρών ταλαντώσεων των δύο εκκρεμών είναι

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}\varphi_1 - \frac{\alpha^2 k}{m_1 l^2}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\varphi_2 + \frac{\alpha^2 k}{m_2 l^2}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

37) Τα εκκρεμή στο παρακάτω σχήμα είναι ίδια μεταξύ τους και κάνουν μικρές ταλαντώσεις στο κατακόρυφο επίπεδο ΑΧΖ γύρω από τη θέση ισορροπίας. Στη θέση ισορροπίας τα εκκρεμή είναι κατακόρυφα και τα ελατήρια σύζευξης δεν έχουν τάση. Τα ραβδιά ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ δεν έχουν βάρος, τα ελατήρια είναι ίδια μεταξύ τους και βρίσκονται στη μέση των ραβδιών.

Λύση



Το σύστημα έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(2\alpha\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2}\, m(2\alpha\dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2}\, m(2\alpha\dot{\varphi}_3)^2 = 2m\alpha^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2)$$

όπου $\alpha = AB_2 = B_2A'$.

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$-mgz_1 - mgz_2 - mgz_3 = -2\alpha mg(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + \sigma\upsilon\nu\varphi_2 + \sigma\upsilon\nu\varphi_3)$$

Επειδή οι γωνίες $\varphi_i$ είναι πολύ μικρές μπορούμε να γράψουμε

$$\sigma\upsilon\nu\varphi_i \simeq 1 - \varphi_i^2/2 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

οπότε η δυναμική ενέργεια βαρύτητας γίνεται (μετά από την παράλειψη των σταθερών όρων)

$$mg\alpha(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)$$

Η συνολική μεταβολή του φυσικού μήκους του αριστερού ελατηρίου είναι κατά προσέγγιση ίση με $B_3B_4 - B_1B_2 = \alpha\varphi_2 - \alpha\varphi_1 = \alpha(\varphi_2 - \varphi_1)$ και του δεξιού ελατηρίου είναι $B_5B_6 - B_3B_4 = \alpha\varphi_3 - \alpha\varphi_2 = \alpha(\varphi_3 - \varphi_2)$.

Επομένως η δυναμική ενέργεια τάσης των ελατηρίων είναι, κατά προσέγγιση,

$$\frac{1}{2}\, k\alpha^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}\, k\alpha^2(\varphi_3 - \varphi_2)^2$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = 2m\alpha^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2) - mg\alpha(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) - \frac{k\alpha^2}{2}\,[(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + (\varphi_3 - \varphi_2)^2]$$

Αντικαθιστώντας την L στις εξισώσεις του Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

βρίσκουμε τελικά ότι οι Δ.Ε των μικρών ταλαντώσεων είναι

$$4m\alpha^2\ddot{\varphi}_1 + b\varphi_1 - k\alpha^2\varphi_2 = 0$$

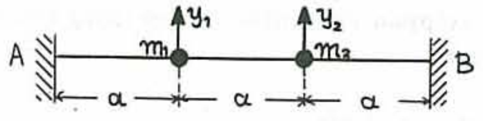
$$4m\alpha^2\ddot{\varphi}_2 + (b + k\alpha^2)\varphi_2 - k\alpha^2(\varphi_1 + \varphi_3) = 0$$

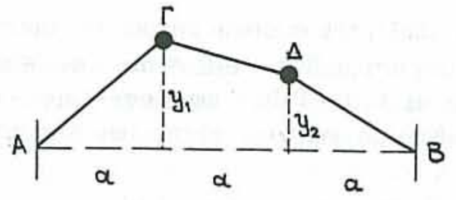
$$4m\alpha^2\ddot{\varphi}_3 + b\varphi_3 - k\alpha^2\varphi_2 = 0$$

όπου $b = 2mg\alpha + k\alpha^2$.

38) Οι δύο μάζες στο παρακάτω σχήμα εκτελούν εγκάρσιες ταλαντώσεις και οι απομακρύνσεις τους από τη θέση ισορροπίας είναι πάντοτε πολύ μικρές. Δεχόμαστε ότι η τάση F της χορδής AB παραμένει σταθερή και ότι δεν υπάρχει βαρύτητα.

Λύση




Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις απομακρύνσεις $y_1$ και $y_2$ των μαζών από τη θέση ισορροπίας τους.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\dot{y}_2^2$$

Στην κατάσταση ισορροπίας τα μήκη των τριών τμημάτων της χορδής είναι ίσα με α. Κατά τις μικρές απομακρύνσεις $y_1$ και $y_2$ τα μήκη αυτά αυξάνονται αντίστοιχα κατά

$$\Delta l_1 = A\Gamma - \alpha = \sqrt{\alpha^2 + y_1^2} - \alpha = \alpha[\sqrt{1 + y_1^2/\alpha^2} - 1] \simeq y_1^2/2\alpha$$

$$\Delta l_2 = \Gamma\Delta - \alpha = \sqrt{\alpha^2 + (y_2 - y_1)^2} - \alpha = \alpha[\sqrt{1 + (y_2 - y_1)^2/\alpha^2} - 1] \simeq (y_2 - y_1)^2/2\alpha$$

$$\Delta l_3 = \Delta B - \alpha = \sqrt{\alpha^2 + y_2^2} - \alpha = \alpha[\sqrt{1 + y_2^2/\alpha^2} - 1] \simeq y_2^2/2\alpha$$

Το έργο που καταβάλλεται έναντι της τάσης F για τις αυξήσεις $\Delta l$ του μήκους κάθε τμήματος είναι $F \cdot \Delta l$. Επομένως, η δυναμική ενέργεια των τριών τμημάτων της χορδής είναι

$$V = F\,\frac{y_1^2}{2\alpha} + F\,\frac{(y_2 - y_1)^2}{2\alpha} + F\,\frac{y_2^2}{2\alpha} = \frac{F}{2\alpha}[y_1^2 + y_2^2 + (y_2 - y_1)^2] = \frac{F}{\alpha}[y_1^2 + y_2^2 - y_1 y_2]$$

Άρα η Λαγκρανζιανή των μαζών είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 \dot{y}_2^2 - \frac{F}{\alpha}\,(y_1^2 + y_2^2 - y_1 y_2) \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας ($y_1$, $y_2$), θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0 \qquad i = 1,\ 2$$

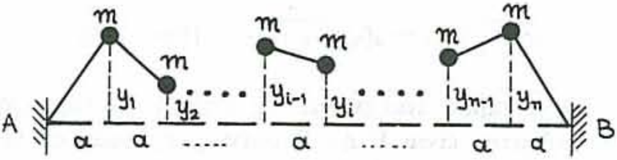
Αντικαθιστώντας την L από την (1) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις των ταλαντώσεων μικρού πλάτους του συστήματος είναι

$$m_1 \ddot{y}_1 + \frac{2F}{\alpha}\, y_1 - \frac{F}{\alpha}\, y_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + \frac{2F}{\alpha}\, y_2 - \frac{F}{\alpha}\, y_1 = 0$$

39) Η χορδή στο παρακάτω σχήμα συνδέει n όμοια σωματίδια που απέχουν ίσες αποστάσεις μεταξύ τους και βρίσκεται σε τάση F. Οι απομακρύνσεις των σωματιδίων από τη θέση ισορροπίας είναι πάντοτε πολύ μικρές. Δεχόμαστε ότι η τάση της χορδής παραμένει σταθερή και ότι η βαρύτητα είναι ασήμαντη. Να εξεταστεί η περίπτωση που το πλήθος των σωματιδίων τείνει στο άπειρο.

## Λύση




Το σύστημα έχει n βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις απομακρύνσεις $y_1$, $y_2$... $y_n$ των σωματιδίων από την θέση ισορροπίας.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + ... + \dot{y}_n^2) = \frac{1}{2}\, m \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \dot{y}_i^2 \qquad (\text{όπου } \dot{y}_{n+1} = 0)$$

Στην κατάσταση ισορροπίας το μήκος των τμημάτων της χορδής είναι ίσο με α. Κατά τις μικρές απομακρύνσεις $y_1$, $y_2$, ... $y_n$ το μήκος του τμήματος της χορδής που βρίσκεται ανάμεσα στα σωματίδια i-1 και i αυξάνεται κατά $\Delta l_i = \sqrt{(y_{i-1} - y_i)^2} - \alpha = \alpha[\sqrt{(y_{i-1} - y_i)^2/\alpha^2} - 1] \simeq (y_{i-1} - y_i)^2/2\alpha$ (όπου $y_0 = y_{n+1} = 0$). Δεδομένου ότι το έργο που καταβάλλεται έναντι της τάσης F για κάθε αύξηση $\Delta l_i$ είναι $F\Delta l_i$ η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$V = \frac{F}{2\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} (y_{i-1} - y_i)^2$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} [m\dot{y}_i^2 - \frac{F}{\alpha}\,(y_{i-1} - y_i)^2] \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε n βαθμούς ελευθερίας, θα έχουμε n εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0$$

Είναι

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -\frac{\partial V}{\partial y_i} = -\frac{1}{2}\,\frac{F}{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}\,[(y_{i-1}-y_i)^2 + (y_i - y_{i+1})^2] = \frac{F}{\alpha}\,(y_{y-1} - 2y_i + y_{i+1})$$

γιατί από το άθροισμα της V μόνον οι όροι $(y_{i-1} - y_i)$ και $(y_i - y_{i+1})$ περιέχουν το $y_i$. Άρα οι εξισώσεις Lagrange γίνονται τελικά

$$m\ddot{y}_i - \frac{F}{\alpha}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots\ n+1$$

Θεωρώντας ότι το πλήθος n των σωματιδίων αυξάνεται απεριόριστα $(n \to \infty)$ και ταυτόχρονα η μάζα και η απόστασή τους τείνουν στο μηδέν $(m \to 0,\ \alpha \to 0)$ έτσι ώστε ο λόγος $m/\alpha$ να είναι σταθερός, προσεγγίζουν τυπικά σε συνεχή χορδή με γραμμική πυκνότητα $\rho \equiv m/\alpha$.

Η Τ γράφεται

$$T = \frac{1}{2}\, m \cdot \sum \dot{y}_i^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m}{\alpha} \sum \dot{y}_i^2 \alpha$$

Για $\alpha \to 0$ η Τ γίνεται

$$T = \frac{1}{2}\,\rho \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx$$

όπου $L = (n+1)\alpha$ είναι το μήκος της χορδής.

Η V γράφεται

$$V = \frac{1}{\cancel{8}\,2}\,\frac{F}{\alpha} \sum (y_{i-1} - y_i)^2 = \frac{1}{2}\, F \sum \left[\frac{y(x-\alpha) - y(x)}{\alpha}\right]^2 \alpha$$

γιατί ο δείκτης i αντιστοιχεί σε απόσταση x από την άκρη της χορδής και ο δείκτης $i-1$ σε απόσταση $x - \alpha$.

Για $\alpha \to 0$ η V γίνεται

$$V = \frac{1}{2}\, F \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

Επομένως, η Λαγκρανζιανή της συνεχούς χορδής είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\,\rho \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx - \frac{1}{2}\, F \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

**40)** Μπορούμε να προσθέσουμε στη Λαγκρανζιανή μια συνάρτηση f των γενικευμένων συντεταγμένων των γενικευμένων ταχυτήτων και του χρόνου χωρίς να πάθουν τίποτα οι εξισώσεις του Lagrange;

Λύση

Στη Λαγκρανζιανή L αντιστοιχούν οι ακόλουθες εξισώσεις Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \dots n) \tag{1}$$

Στη νέα Λαγκρανζιανή

$$L' = L + f(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

αντιστοιχούν οι εξισώσεις

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0$$

Για να μην αλλάξουν οι εξισώσεις του Lagrange πρέπει να είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

δηλ. πρέπει να είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0 \tag{2}$$

οποιεσδήποτε και αν είναι οι συναρτήσεις $q_i(t)$.

Αυτό σημαίνει ότι η f πρέπει να είναι γραμμική συνάρτηση των γεν. ταχυτήτων $\dot{q}_i$, διαφορετικά οι όροι που περιέχουν τις $\ddot{q}_i$ και προκύπτουν από την παραγώγιση ως προς t στις εξισώσεις (2), δε θα μπορούσαν να αναιρεθούν από τους όρους που προκύπτουν από την $\partial f/\partial q_i$ για να προκύψει μηδενικό αποτέλεσμα. Θα είναι λοιπόν

$$f = \sum_k \alpha_k \dot{q}_k + \beta \qquad (k = 1, \dots n) \tag{3}$$

όπου τα $\alpha_k$, β είναι συναρτήσεις των $q_1, \dots, q_n$, t.

Αντικαθιστώντας την (3) στις (2) βρίσκουμε

$$\frac{d\alpha_i}{dt} - \sum_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i}\dot{q}_k - \frac{\partial \beta}{\partial q_i} = 0$$

Αλλά είναι

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}$$

Άρα η (4) γίνεται

$$\sum_k \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k + \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} - \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) = 0 \tag{5}$$

Για να είναι η (5) ταυτότητα, πρέπει να μηδενίζονται όλοι οι όροι που είναι μέσα στις παρενθέσεις. Ο μηδενισμός αυτός σημαίνει, όπως γνωρίζουμε από τα μαθηματικά, ότι υπάρχει μια συνάρτηση

$$F(q_1, \ldots, q_n, t)$$

τέτοια ώστε να είναι

$$\alpha_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad \beta = \frac{\partial F}{\partial t} \tag{6}$$

Αντικαθιστώντας τις (6) στην (3) βρίσκουμε

$$f = \sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dF}{dt}$$

Ώστε, όταν προσθέσουμε στη Λαγκρανζιανή μια ολική παράγωγο $dF/dt$ μιας συνάρτησης $F(q_1, \ldots, q_n, t)$, οι εξισώσεις του Lagrange δεν αλλάζουν καθόλου.

**41)** Να βρεθεί η έκφραση της Λαγκρανζιανής ενός υλικού σημείου Σ σε τυχαίο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς και με τη βοήθειά της να βρεθεί το γενικευμένο δυναμικό που αντιστοιχεί στις δυνάμεις αδράνειας.

Λύση

Η Λαγκρανζιανή υπολογίζεται πάντα σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S και είναι ίση με

$$L = \frac{1}{2} m\upsilon^2 - U \tag{1}$$

όπου υ είναι η ταχύτητα του Σ ως προς το S. Αν O είναι ένα τυχαίο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς, θα είναι

$$\upsilon = u + \upsilon_0 + \omega \times r, \quad u = \frac{d_{\sigma\chi} r}{dt} = \frac{d_a r}{dt} - \omega \times r \tag{2}$$

όπου $\mathbf{r}$ και $\mathbf{u}$ είναι η θέση και η ταχύτητα του Σ ως προς το O, $\boldsymbol{\omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του O, $d_{\sigma\chi}/dt$, $d_\alpha/dt$ είναι τα σύμβολα της σχετικής (ως προς το O) και της απόλυτης (ως προς το S) παραγώγισης και $\upsilon_0$ είναι η ταχύτητα της αρχής του O. Από τις (2) προκύπτει ότι

$$\upsilon^2 = \mathbf{u}^2 + \upsilon_0^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + 2\mathbf{u} \cdot \upsilon_0 + 2\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\upsilon_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) =$$

$$= \mathbf{u}^2 + \upsilon_0^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + 2\, \frac{d_\alpha \mathbf{r}}{dt} \cdot \upsilon_0 + 2\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{3}$$

Επίσης είναι

$$\frac{d_\alpha \mathbf{r}}{dt} \cdot \upsilon_0 = \frac{d_\alpha}{dt}(\mathbf{r} \cdot \upsilon_0) - \mathbf{r} \cdot \frac{d_\alpha \upsilon_0}{dt} = \frac{d_\alpha}{dt}(\mathbf{r} \cdot \upsilon_0) - \mathbf{r} \cdot \gamma_0$$

όπου $\gamma_0 = d_\alpha \upsilon_0/dt$ είναι η επιτάχυνση της αρχής του O. Άρα η (3) γίνεται

$$\upsilon^2 = \mathbf{u}^2 + \upsilon_0^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + 2\, \frac{d_\alpha}{dt}(\mathbf{r} \cdot \upsilon_0) - 2\mathbf{r} \cdot \gamma_0 + 2\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{4}$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση, η ολική παράγωγος στην (4) μπορεί να αγνοηθεί. Το ίδιο ισχύει και για τον όρο $\upsilon_0^2$ της (4) γιατί μπορεί και αυτός να γραφεί με μορφή ολικής παραγώγου. Αντικαθιστώντας λοιπόν τους υπόλοιπους όρους της (4) στην (1) και παίρνοντας υπόψη ότι είναι $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2$, βρίσκουμε

$$L = \frac{1}{2}\, m\mathbf{u}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}\, m(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 + m\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\gamma_0 \cdot \mathbf{r} - U \tag{5}$$

Το γενικευμένο δυναμικό $U(\mathbf{r}, \upsilon, t)$ στη Λαγκρανζιανή (5) συνδέεται με τη δύναμη $\mathbf{F}$ με την ακόλουθη σχέση

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \upsilon}\right) - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{F} \tag{6}$$

(όπου η παράγωγος του βαθμωτού μεγέθους U ως προς το διάνυσμα $\mathbf{r}$ συμβολίζει το διάνυσμα που έχει συνιστώσες τις παραγώγους του U ως προς τις συνιστώσες του $\mathbf{r}$, δηλ. $\partial U/\partial \mathbf{r} = (\partial U/\partial x)\mathbf{i} + (\partial U/\partial y)\mathbf{j} + (\partial U/\partial z)\mathbf{k} =$ $= \mathrm{grad} U$ κ.λ.π.).

Αντικαθιστώντας τη Λαγκρανζιανή (5) στις εξισώσεις του Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \upsilon}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{7}$$

και παίρνοντας υπόψη την (6) βρίσκουμε

$$m\,\frac{du}{dt} = F - m\gamma_0 + mr \times \dot{\omega} + 2mu \times \omega + m\omega \times (r \times \omega) \tag{8}$$

όπου η παράγωγος d/dt στην (8) είναι η σχετική παράγωγος. Οι τύποι (5) και (8) δίνουν αντίστοιχα τη Λαγκρανζιανή και τη Δ.Ε της κίνησης του υλικού σημείου σχετικά με τυχαίο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Οι όροι του δεύτερου μέλους της (8), εκτός από τον F, είναι οι γνωστές δυνάμεις αδράνειας. Κατά την εκτέλεση των πράξεων που οδηγούν στην (8), η δύναμη αδράνειας $-m\gamma_0$ προέρχεται από τον όρο $U_1 = -m\gamma_0 \cdot r$ της L, δηλ. είναι $-\partial U_1/\partial r = -m\gamma_0$, η δύναμη αδράνειας $m\omega\ (r \times \omega)$, δηλ. η φυγόκεντρη δύναμη, προέρχεται από τον όρο $U_2 = -{}^1/_2 m(\omega \times r^2) = -{}^1/_2 m[\omega^2 r^2 - (\omega \cdot r)^2]$ της L και οι υπόλοιπες δύο δυνάμεις αδράνειας προέρχονται από τον όρο $U_3 = -mu \cdot (\omega \times r)$, δηλ.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_3}{\partial \upsilon}\right) - \frac{\partial U_3}{\partial r} = 2mu \times \omega + mr \times \dot{\omega} \tag{9}$$

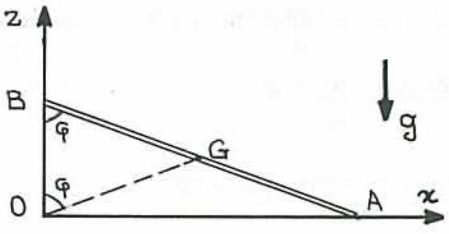
Επομένως, ο όρος $U_1$ είναι το δυναμικό της δύναμης αδράνειας $-m\gamma_0$ που οφείλεται στην επιτάχυνση της αρχής του Ο και ο όρος $U_2$ είναι το δυναμικό της φυγόκεντρης δύναμης. Επίσης, όπως φαίνεται από την (9), ο όρος $U_3$ είναι το γενικευμένο δυναμικό της δύναμης Coriolis $2mu \times \omega$ μόνο όταν η $\omega$ είναι σταθερή ($\dot{\omega} = 0$).

## β) Δυναμική των στερεών σωμάτων

## *$\beta_1$: Κατά Lagrange*

1) Το ομογενές ραβδί ΑΒ στο παρακάτω σχήμα κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο ΧΟΖ έτσι ώστε το άκρο του Α να γλυστράει πάντοτε πάνω στον άξονα ΟΧ και το άκρο Β πάνω στον ΟΖ.

Λύση




Αν η κίνηση του AB πάνω στο επίπεδο ήταν τελείως ελεύθερη, θα είχε τρεις βαθμούς ελευθερίας. Τώρα όμως υπάρχουν δύο δεσμοί, οι $z_A = 0$ και $x_B = 0$. Επομένως το AB έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία φ.

Η κινητική ενέργεια του ραβδιού είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{1}{2}\, I_G\dot{\varphi}^2 \qquad (I_G = ml^2/12)$$

όπου m είναι η μάζα του, l το μήκος του, G το κέντρο μάζας του και $I_G$ η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνάει από το G και είναι κάθετος στην AB.

Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$x_G = \frac{l}{2}\, ημφ, \qquad z_G = \frac{l}{2}\, συνφ$$

οπότε η T γίνεται

$$T = \frac{1}{2}\, m \left(\frac{l}{2}\, \dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\, \frac{ml^2}{12}\, \dot{\varphi}^2 = \frac{ml^2}{6}\, \dot{\varphi}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του AB είναι

$$V = mgz_G = mg\, \frac{l}{2}\, συνφ$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του AB είναι

$$L = T - V = \frac{ml^2}{6}\, \dot{\varphi}^2 - mg\, \frac{l}{2}\, συνφ \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

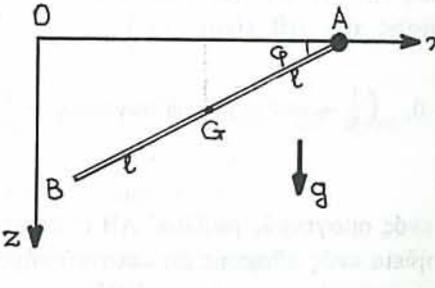
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας την (1) στην (2) βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης του AB είναι

$$\ddot{\varphi} - \frac{3g}{2l}\,\eta\mu\varphi = 0$$

2) Το άκρο A ενός ομογενούς ραβδιού AB μπορεί να γλυστράει πάνω σε ακλόνητο οριζόντιο άξονα OX με τη βοήθεια ενός μικρού αβαρούς δαχτυλιδιού που είναι στερεωμένο στο A και περιβάλλει τον άξονα. Το ραβδί έχει μήκος 2l, μάζα m και η κίνησή του γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο XOZ.

Λύση




Αν η κίνηση του AB πάνω στο επίπεδο XOZ ήταν τελείως ελεύθερη, θα είχε τρεις βαθμούς ελευθερίας. Τώρα όμως υπάρχει ένας δεσμός, ο $z_A = 0$. Επομένως το AB έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες την τετμημένη $x_G$ του κέντρου μάζας G του ραβδιού και τη γωνία φ.

Η κινητική ενέργεια του ραβδιού είναι

$$T = \frac{1}{2}\,m(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{1}{2}\,I_G\dot{\varphi}^2$$

όπου $I_G = ml^2/3$ είναι η ροπή αδράνειάς του ως προς οριζόντιο άξονα που περνάει από το G. Από το σχήμα προκύπτει ότι $z_G = l\eta\mu\varphi$ οπότε η T γίνεται τελικά

$$T=\frac{1}{2}\,m\dot{x}_G^2+\frac{ml^2}{2}\left(\frac{1}{3}+\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του AB είναι

$$V=-mgz_G=-mgl\eta\mu\varphi$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του AB είναι

$$L=T-V=\frac{1}{2}\,m\dot{x}_G^2+\frac{ml^2}{2}\left(\frac{1}{3}+\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 \quad +mgl\eta\mu\varphi \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας, θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

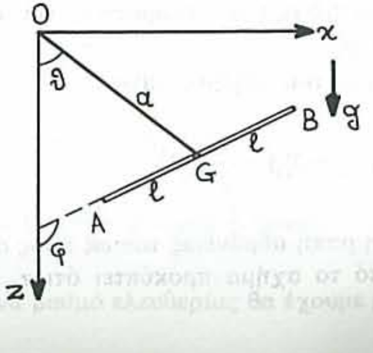
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_G}=0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$$

Αντικαθιστώντας την (1) στις (2) βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του AB είναι

$$\ddot{x}_G=0, \quad \left(\frac{1}{3}+\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right)\ddot{\varphi}\ \underset{+}{-}\ \dot{\varphi}^2\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu\varphi-\frac{g}{l}\,\sigma\upsilon\nu\varphi=0$$

3) Το μέσο G ενός ομογενούς ραβδιού AB συνδέεται με ένα ακλόνητο σημείο O με τη βοήθεια ενός αβαρούς μη εκτατού νήματος. Η κίνηση του ραβδιού γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο XOZ και εξετάζουμε μόνο την περίπτωση που το νήμα παραμένει τεντωμένο κατά την κίνηση.

Λύση



Αν η κίνηση του AB πάνω στο επίπεδο XOZ ήταν τελείως ελεύθερη, θα είχε τρεις βαθμούς ελευθερίας. Τώρα όμως υπάρχει ένας δεσμός, ότι OG = σταθ. = α. Επομένως η AB έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες φ και ϑ που σχηματίζουν αντίστοιχα το ραβδί και το νήμα με τον άξονα OZ.

Η κινητική ενέργεια του ραβδιού είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{1}{2}\, I_G \dot{\varphi}^2 \qquad I_G = ml^2/3$$

όπου m είναι η μάζα του, 2l είναι το μήκος του, G είναι το κέντρο μάζας του και $I_G$ η ροπή αδράνειας ως προς άξονα κάθετο στην AB στο σημείο G.

Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$x_G = \alpha\eta\mu\vartheta, \qquad z_G = \alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

οπότε η T γίνεται

$$T = \frac{1}{2}\, m\alpha^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{ml^2}{3}\,\dot{\varphi}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του AB είναι

$$V = -mgz_G = -mg\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του AB είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m\alpha^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{ml^2}{3}\,\dot{\varphi}^2 + mg\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

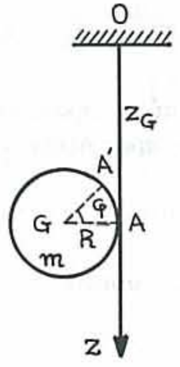
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0 \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (1) στις (2) βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του AB είναι

$$\dot{\varphi} = \sigma\tau\alpha\theta., \qquad \ddot{\vartheta} + \frac{g}{\alpha}\,\eta\mu\vartheta = 0$$

**4)** Κύλινδρος είναι τυλιγμένος με μη εκτατή ταινία της οποίας το βάρος και το πάχος είναι ασήμαντα, ενώ το πλάτος είναι ίσο με το μήκος του κυλίνδρου. Το ελεύθερο άκρο της ταινίας στερεώνεται κάπου και ο κύλινδρος αφήνεται να πέσει από την οριζόντια θέση ενώ η ταινία ξετυλίγεται κατά την κατακόρυφη διεύθυνση.

Λύση




Ο κύλινδρος έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία $\varphi$ η οποία καθορίζει την περιστροφή του κυλίνδρου καθώς ξετυλίγεται η ταινία. Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\, I_G\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\, m\dot{z}_G^2 + \frac{1}{2}\,\frac{mR^2}{2}\,\dot{\varphi}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του κυλίνδρου είναι

$$V = -mgz_G$$

Επειδή η ταινία είναι μη εκτατή, για να κατέβει ο κύλινδρος κατά διάστημα $dz_G$ πρέπει να γυρίσει κατά γωνία $d\varphi$ που δίνεται από τη σχέση

$$dz_G = Rd\varphi \qquad (\text{ή } \dot{z}_G = R\dot{\varphi}) \tag{1}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) βρίσκουμε

$$z_G = R\varphi + \text{σταθ.} \tag{2}$$

Παίρνοντας υπόψη τις (1) και (2) η Λαγκρανζιανή γίνεται (μετά την παράλειψη του σταθερού όρου)

$$L = \frac{3}{4}\, mR^2\dot{\varphi}^2 + mgR\varphi \tag{3}$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας (φ), θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

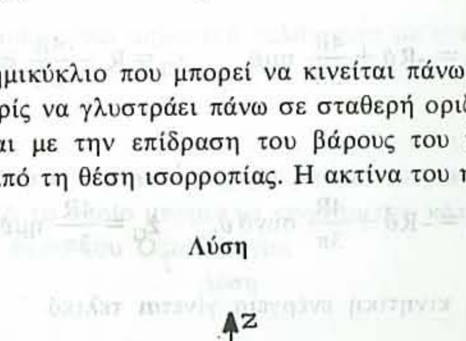
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Αντικαθιστώντας την L από την (3) στην εξίσωση αυτή βρίσκουμε ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης του κυλίνδρου είναι

$$\ddot{\varphi} = \frac{2g}{3R} \qquad \left(\text{ή } \ddot{z}_G = \frac{2g}{3}\right)$$

5) Ομογενές ημικύκλιο που μπορεί να κινείται πάνω σε κατακόρυφο επίπεδο κυλάει χωρίς να γλυστράει πάνω σε σταθερή οριζόντια ευθεία. Η κίνησή του γίνεται με την επίδραση του βάρους του και είναι μικρή ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας. Η ακτίνα του ημικύκλιου είναι R.

Λύση




Έστω O το σημείο επαφής του ημικύκλιου με την ευθεία στην κατάσταση ισορροπίας δηλαδή όταν η KG είναι κατακόρυφη (G=κέντρο μάζας). Το ημικύκλιο έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία $\vartheta$ που σχηματίζει η KG με την κατακόρυφη ΚΑ. Η κινητική ενέργεια του ημικυκλίου είναι

$$T=\frac{1}{2}\,m\upsilon_G^2+\frac{1}{2}\,I_G\dot{\vartheta}^2=\frac{1}{2}\,m(\dot{x}_G^2+\dot{z}_G^2)+\frac{1}{2}\,I_G\dot{\vartheta}^2$$

Η απόσταση KG είναι, όπως γνωρίζουμε, ίση με $KG=4R/3\pi$. Επομένως θα είναι

$$I_G=I_K-m(KG)^2=\frac{mR^2}{2}-m\,\frac{16R^2}{9\pi^2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{16}{9\pi^2}\right)mR^2$$

Η συνθήκη κύλισης του ημικύκλιου είναι

$$OA=-R\vartheta$$

Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας G είναι

$$x_G=-R\vartheta+\frac{4R}{3\pi}\,\eta\mu\vartheta,\qquad z_G=R-\frac{4R}{3\pi}\,\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Άρα

$$\dot{x}_G=-R\dot{\vartheta}+\frac{4R}{3\pi}\,\sigma\upsilon\nu\vartheta\,\dot{\vartheta},\qquad \dot{z}_G=\frac{4R}{3\pi}\,\eta\mu\vartheta\,\dot{\vartheta}$$

Επομένως η κινητική ενέργεια γίνεται τελικά

$$T=\frac{1}{2}\,mR^2\left(\frac{3}{2}-\frac{8}{3\pi}\,\sigma\upsilon\nu\vartheta\right)\dot{\vartheta}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας (μετρημένη από τον ΟΧ) είναι

$$V=mgz_G=mg\left(R-\frac{4R}{3\pi}\,\sigma\upsilon\nu\vartheta\right)$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του ημικύκλιου είναι

$$L=T-V=\frac{1}{2}\,mR^2\left(\frac{3}{2}-\frac{8}{3\pi}\,\sigma\upsilon\nu\vartheta\right)\dot{\vartheta}^2-mg\left(R-\frac{4R}{3\pi}\sigma\upsilon\nu\vartheta\right)\qquad(1)$$

Επειδή η ταλάντωση είναι μικρή, τα $\vartheta$ και $\dot{\vartheta}$ είναι μικρά οπότε είναι $\sigma\upsilon\nu\vartheta\simeq 1-\vartheta^2/2$ και η L μετά την παράλειψη των σταθερών όρων και των όρων τρίτης και ανώτερης τάξης ως προς $\vartheta$, $\dot{\vartheta}$ γίνεται

$$L = \frac{1}{2}\, mR^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)\dot{\vartheta}^2 - mg\, \frac{4R}{6\pi}\, \vartheta^2 \tag{2}$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας ($\vartheta$), θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$$

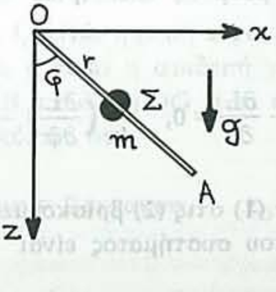
Αντικαθιστώντας την L από την (2) στην εξίσωση αυτή τελικά βρίσκουμε

$$\ddot{\vartheta} + \frac{8}{9\pi - 16}\,\frac{g}{R}\,\vartheta = 0$$

Η κίνηση λοιπόν είναι αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{8g/(9\pi - 16)R}$.

**6)** Το σώμα Σ στο παρακάτω σχήμα μπορεί να γλυστράει πάνω στο ομογενές ραβδί ΟΑ το οποίο μπορεί να κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο ΧΟΖ έχοντας το άκρο του Ο ακλόνητο.

**Λύση**




Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις $\varphi$ και $r = O\Sigma$. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}_\Sigma^2 + \dot{z}_\Sigma^2) + \frac{1}{2}\, I_0 \dot{\varphi}^2, \qquad I_0 = \frac{Ml^2}{3}$$

όπου m είναι η μάζα του Σ, M είναι η μάζα του ΟΑ, l είναι το μήκος του ΟΑ και $I_0$ είναι η ροπή αδράνειας του ραβδιού ως προς άξονα κάθετο στην ΟΑ στο σημείο Ο. Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$x_\Sigma = r\eta\mu\varphi, \qquad z_\Sigma = r\sigma\upsilon\nu\varphi$$

οπότε η T γίνεται

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}\,\frac{Ml^2}{3}\,\dot{\varphi}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του Σ είναι $-mgz_\Sigma = -mgr\sigma\upsilon\nu\varphi$ και του ραβδιού είναι $-Mgz_G = -Mg\,\frac{l}{2}\,\sigma\upsilon\nu\varphi$ όπου G είναι το κέντρο μάζας του. Άρα η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$V = -mgr\sigma\upsilon\nu\varphi - Mg\,\frac{l}{2}\,\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}\,\frac{Ml^2}{3}\,\dot{\varphi}^2 + mgr\sigma\upsilon\nu\varphi + Mg\,\frac{l}{2}\,\sigma\upsilon\nu\varphi \quad (1)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad (2)$$

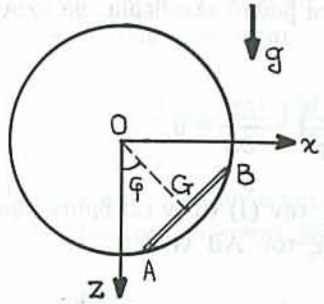
Αντικαθιστώντας την (1) στις (2) βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - g\sigma\upsilon\nu\varphi = 0$$

$$\left(\frac{Ml^2}{3} + mr^2\right)\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + \left(mr + \frac{Ml}{2}\right)g\eta\mu\varphi = 0$$

7) Τα άκρα ομογενούς ραβδιού AB μπορούν, με τη βοήθεια μικρών αβαρών δαχτυλιδιών, να γλιστρούν πάνω σε μία κατακόρυφη ακλόνητη περιφέρεια κύκλου.

Λύση




Αν η κίνηση του AB πάνω στο κατακόρυφο επίπεδο XOZ ήταν τελείως ελεύθερη, θα είχε τρεις βαθμούς ελευθερίας. Τώρα όμως υπάρχουν δύο δεσμοί οι οποίοι μπορούν να εκφραστούν με τις σχέσεις OB = σταθ. ≡ ≡ R και OA = σταθ. ≡ R. Επομένως η AB έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία φ που σχηματίζει η OG με τον άξονα OZ όπου G είναι το κέντρο μάζας του AB.

Η κινητική ενέργεια του ραβδιού είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{1}{2}\, I_G \dot{\varphi}^2 \quad I_G = \frac{mR^2 \eta\mu^2\alpha}{3}$$

όπου m είναι η μάζα του, $I_G$ είναι η ροπή αδράνειας ως προς άξονα κάθετο στην AB στο σημείο G, α είναι η σταθερή γωνία $B\hat{O}G$ και $\dot{\varphi}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του AB (επειδή η OG είναι πάντοτε κάθετη στην AB).

Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$x_G = OG\eta\mu\varphi = R\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\varphi, \qquad z_G = OG\sigma\upsilon\nu\varphi = R\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi$$

οπότε η T γίνεται

$$T = \frac{1}{2}\, mR^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{mR^2\eta\mu^2\alpha}{3}\,\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\, mR^2\left(\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \frac{1}{3}\,\eta\mu^2\alpha\right)\dot{\varphi}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του AB είναι

$$V = -mgz_G = -mgR\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του ΑΒ είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, mR^2\left(\sigmaυν^2α + \frac{1}{3}\, ημ^2α\right)\dot{φ}^2 + mgRσυνασυνφ \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

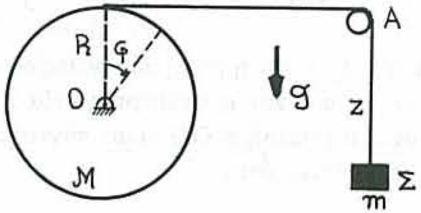
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{φ}}\right) - \frac{\partial L}{\partial φ} = 0 \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (1) στην (2) βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης του ΑΒ είναι

$$\left(συν^2α + \frac{1}{3}\, ημ^2α\right)\ddot{φ} + \frac{gσυνα}{R}\, ημφ = 0$$

° **8)** Ο ομογενής κύλινδρος στο παρακάτω σχήμα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον ακλόνητο οριζόντιο άξονά του Ο και το σώμα Σ κινείται κατακόρυφα και είναι κρεμασμένο από αβαρές και μη εκτατό νήμα το οποίο περνάει από τη μικρή ακλόνητη τροχαλία Α και τυλίγεται στον κύλινδρο. Η ενέργεια της τροχαλίας Α θεωρείται ασήμαντη.

Λύση




Η θέση του κυλίνδρου καθορίζεται από τη γωνία στροφής φ και η θέση του σώματος Σ από το μήκος $z = ΑΣ$ (ως θετική φορά του z διαλέγουμε την $\overrightarrow{ΑΣ}$). Υπάρχει ένας δεσμός, ότι η ταχύτητα $\dot{z}$ του Σ πρέπει να είναι ίση με τη γραμμική ταχύτητα $R\dot{φ}$ των σημείων της εξωτερικής επιφάνειας του κυλίνδρου επειδή το νήμα είναι μη εκτατό, δηλαδή

$$\dot{z} = R\dot{φ} \qquad (1)$$

Αν υποθέσουμε, χωρίς να ζημιωθεί η γενικότητα της άσκησης, ότι για

$t=0$ είναι $\varphi = z = 0$, τότε η ολοκλήρωση της (1) δίνει

$$z = R\varphi \tag{2}$$

Επομένως το σύστημα κύλινδρος-σώμα Σ έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία φ.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\, I_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\, m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}\, \Big(\frac{M}{2} + m\Big) R^2\dot{\varphi}^2$$

όπου R, M, $I_0$ είναι αντίστοιχα η ακτίνα, η μάζα και η ροπή αδράνειας (ως προς O ) του κυλίνδρου. Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του Σ είναι

$$V = -mgz = -mgR\varphi$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, \Big(\frac{M}{2} + m\Big) R^2\dot{\varphi}^2 + mgR\varphi \tag{3}$$

Η εξίσωση Lagrange είναι της μορφής

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{4}$$

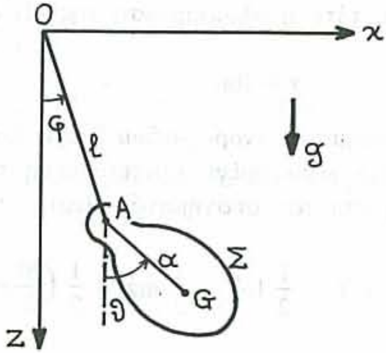
Αντικαθιστώντας την (3) στην (4) βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση για τη φ είναι

$$\ddot{\varphi} = \frac{m}{\Big(\frac{M}{2} + m\Big)}\, g \equiv \text{σταθ.}$$

9) Το στερεό Σ στο παρακάτω σχήμα κρεμιέται από το σχοινί ΟΑ και κάνει μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας έτσι ώστε το κέντρο μάζας του G να κινείται πάντα στο κατακόρυφο επίπεδο ΟΧΖ.

Λύση

Το στερεό Σ έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες φ και ϑ που φαίνονται στο σχήμα. Η κινητική ενέργεια του στερεού είναι




$$T = \frac{1}{2}\, m\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\, I\dot{\vartheta}^2$$

όπου m είναι η μάζα του Σ και I είναι η ροπή αδράνειας του Σ ως προς οριζόντιο άξονα που περνάει από το A.

Αν x, z είναι οι συντεταγμένες του G, και $AG = \alpha$, θα είναι

$$x = l\eta\mu\varphi + \alpha\eta\mu\vartheta, \quad z = l\sigma\upsilon\nu\varphi + \alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

$$\dot{x} = l\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi + \alpha\vartheta\sigma\upsilon\nu\dot{\vartheta}, \quad \dot{z} = -l\dot{\varphi}\eta\mu\varphi - \alpha\dot{\vartheta}\eta\mu\vartheta$$

$$\upsilon_G^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

Άρα η T γίνεται τελικά

$$T = \frac{1}{2}\, ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\,(m\alpha^2 + I)\dot{\vartheta}^2 + m\alpha l\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\sigma\upsilon\nu(\vartheta - \varphi)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του Σ είναι

$$V = -mgz = -mg(l\sigma\upsilon\nu\varphi + \alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta)$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του Σ είναι

$$L = T - V = \frac{ml^2}{2}\,\dot{\varphi}^2 + \frac{m\alpha^2 + I}{2}\,\dot{\vartheta}^2 + m\alpha l\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\sigma\upsilon\nu(\vartheta - \varphi) + mg(l\sigma\upsilon\nu\varphi + \alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta) \quad (1)$$

Στην ισορροπία είναι $\varphi = \vartheta = \dot{\varphi} = \dot{\vartheta} = 0$. Κατά τις μικρές ταλαντώσεις τα $\varphi$, $\vartheta$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$ είναι μικρά. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\eta\mu\vartheta \simeq \vartheta, \quad \eta\mu\varphi \simeq \varphi, \quad \sigma\upsilon\nu\vartheta \simeq 1 - \vartheta^2/2, \quad \sigma\upsilon\nu\varphi \simeq 1 - \varphi^2/2 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) στην (1) και παραλείποντας τους όρους τρίτης τάξης και πάνω (ως προς τις μικρές ποσότητες $\varphi$, $\vartheta$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$), βρίσκουμε

$$L = \frac{ml^2}{2}\,\dot{\varphi}^2 + \frac{m\alpha^2 + I}{2}\,\dot{\vartheta}^2 + m\alpha l\dot{\varphi}\dot{\vartheta} - \frac{mg}{2}\,(l\varphi^2 + \alpha\vartheta^2) \qquad (3)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας ($\varphi$, $\vartheta$), θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = 0 \qquad (4)$$

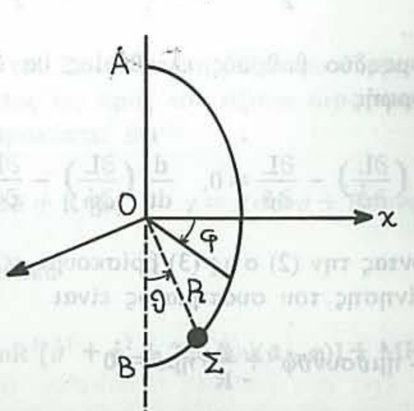
Αντικαθιστώντας την (3) στις (4) βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις των μικρών ταλαντώσεων του Σ είναι

$$l\ddot{\varphi} + \alpha\ddot{\vartheta} + g\varphi = 0$$

$$l\ddot{\varphi} + (\alpha + I/m\alpha)\ddot{\vartheta} + g\vartheta = 0$$

**10)** Υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω σε κυκλικό σύρμα το οποίο μπορεί να περιστρέφεται γύρω από την ακλόνητη κατακόρυφη διάμετρό του AB.

Λύση




Η θέση του σύρματος καθορίζεται από τη γωνία στροφής $\varphi$ γύρω από την AB και η θέση του Σ ως προς το σύρμα καθορίζεται από τη γωνία $\vartheta$. Το σύστημα σύρμα - υλικό σημείο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες $\varphi$ και $\vartheta$.

Έστω m η μάζα του Σ, R η ακτίνα του σύρματος και I η ροπή αδράνειας του σύρματος ως προς τον άξονα AB. Οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων του Σ είναι

$$x = R\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad y = R\eta\mu\vartheta\eta\mu\varphi, \quad z = R\sigma\upsilon\nu\vartheta \tag{1}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\, I\dot{\varphi}^2$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις (1) η T γίνεται

$$T = \frac{1}{2}\, mR^2(\dot{\vartheta}^2 + \eta\mu^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}\, I\dot{\varphi}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του Σ είναι

$$V = -mgz = -mgR\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, mR^2(\dot{\vartheta}^2 + \eta\mu^2\vartheta\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}\, I\dot{\varphi}^2 + mgR\sigma\upsilon\nu\vartheta \tag{2}$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας την (2) στις (3) βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

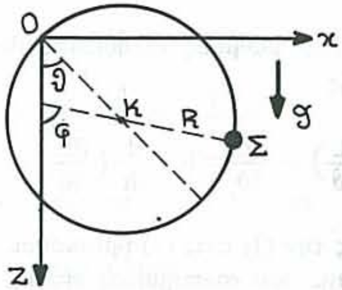
$$\ddot{\vartheta} - \eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}\,\eta\mu\vartheta = 0$$

$$(mR^2\eta\mu^2\vartheta + I)\dot{\varphi} = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (\text{επειδή } \partial L/\partial\varphi = 0)$$

11) Ομογενές κυκλικό σύρμα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο του κύκλου

και περνάει από ένα σημείο Ο της περιφέρειας. Ένα υλικό σημείο Σ είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω στο σύρμα.

Λύση




Η θέση του Σ πάνω στο σύρμα καθορίζεται π.χ. από τη γωνία φ που σχηματίζει η ΚΣ με τον κατακόρυφο ακίνητο άξονα ΟΖ. Η θέση του σύρματος ως προς τους ακίνητους άξονες ΟΧΥΖ καθορίζεται π.χ. από τη γωνία στροφής $\vartheta$ της ΟΚ ως προς τον ΟΖ. Επομένως το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας και διαλέγουμε για γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες $\vartheta$ και φ.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\, I_0\dot{\vartheta}^2, \qquad I_0 = 2MR^2 \qquad (R = OK)$$

όπου m είναι η μάζα του Σ, Μ είναι η μάζα του σύρματος και $I_0$ η ροπή αδράνειας του σύρματος ως προς τον άξονα περιστροφής του.

Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$x = R\eta\mu\vartheta + R\eta\mu\varphi, \qquad z = R\sigma\upsilon\nu\vartheta + R\sigma\upsilon\nu\varphi$$

οπότε η Τ γίνεται τελικά

$$T = \frac{1}{2}\, mR^2[\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu(\vartheta - \varphi)] + MR^2\dot{\vartheta}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$V = -mgz - Mgz_K = -mgR(\sigma\upsilon\nu\vartheta + \sigma\upsilon\nu\varphi) - MgR\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\ mR^2[\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\text{συν}(\vartheta - \varphi)] + MR^2\dot{\vartheta}^2 + mgR(\text{συν}\vartheta +$$

$$+ \text{συν}\varphi) + MgR\text{συν}\vartheta \tag{1}$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{2}$$

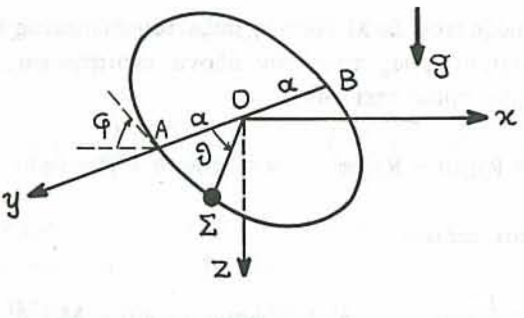
Αντικαθιστώντας την (1) στις (2) βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

$$(m + 2M)R^2\ddot{\vartheta} + mR^2\ddot{\varphi}\text{συν}(\vartheta - \varphi) + mR^2\dot{\varphi}^2\text{ημ}(\vartheta - \varphi) + (m + M)gR\text{ημ}\vartheta = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \ddot{\vartheta}\text{συν}(\vartheta - \varphi) - \dot{\vartheta}^2\text{ημ}(\vartheta - \varphi) + \frac{g}{R}\ \text{ημ}\varphi = 0$$

**12)** Υλικό σημείο Σ με μάζα m είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω σε ομογενές κυκλικό σύρμα με μάζα M και ακτίνα α το οποίο είναι ελεύθερο να περιστρέφεται γύρω από μια σταθερή οριζόντια διάμετρή του AB.

Λύση




Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τη γωνία $\vartheta$ που σχηματίζει η $\overrightarrow{O\Sigma}$ με την $\overrightarrow{OA}$ και τη γωνία $\varphi$ που καθορίζει τη στροφή του κύκλου γύρω από την AB (βλέπε στο σχήμα). Οι συντεταγμένες του Σ είναι

$$x = \alpha\text{ημ}\vartheta\text{συν}\varphi, \quad y = \alpha\text{συν}\vartheta, \quad z = \alpha\text{ημ}\vartheta\text{ημ}\varphi$$

Άρα η κινητική ενέργεια του Σ είναι

$$T_1 = \frac{1}{2}\ m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\ m\alpha^2(\dot{\vartheta}^2 + \eta\mu^2\vartheta\dot{\varphi}^2)$$

Η κινητική ενέργεια του σύρματος είναι

$$T_2 = \frac{1}{2}\ I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\ \left(\frac{M\alpha^2}{2}\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4}\ M\alpha^2\dot{\varphi}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του Σ είναι

$$V = -mgz = -mg\alpha\eta\mu\vartheta\eta\mu\varphi$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T_1 + T_2 - V = \frac{m\alpha^2}{2}\ (\dot{\vartheta}^2 + \eta\mu^2\vartheta\dot{\varphi}^2) + \frac{M\alpha^2}{4}\ \dot{\varphi}^2 + mg\alpha\eta\mu\vartheta\eta\mu\varphi \tag{1}$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας ($\vartheta$, $\varphi$) θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{2}$$

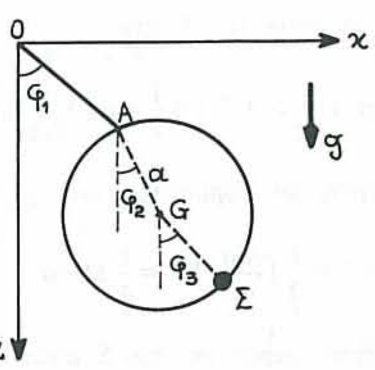
Αντικαθιστώντας την (1) στις (2) βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

$$\ddot{\vartheta} - \eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta\dot{\varphi}^2 - (g/\alpha)\sigma\upsilon\nu\vartheta\eta\mu\varphi = 0$$

$$(2m\eta\mu^2\vartheta + M)\ddot{\varphi} + 4m\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi} - 2m(g/\alpha)\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi = 0$$

13) Το κυκλικό σύρμα στο παρακάτω σχήμα κρεμιέται από το σχοινί ΟΑ και μπορεί να κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο OXZ. Πάνω στο σύρμα μπορεί να γλυστράει με την επίδραση του βάρους του ένα υλικό σημείο Σ. Το σύστημα κάνει μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας. Το σχοινί δεν έχει βάρος και είναι μη-εκτατό. Το Σ έχει μάζα m, το σύρμα έχει μάζα M = 8m και είναι OA = AG = α.

Λύση




Το σύστημα έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ που φαίνονται στο σχήμα. Η θέση ευσταθούς ισορροπίας είναι η $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$. Οι συντεταγμένες $x_G$, $z_G$ του G και x, z του Σ είναι

$$\begin{aligned} x_G &= \alpha\eta\mu\varphi_1 + \alpha\eta\mu\varphi_2, \quad x = \alpha\eta\mu\varphi_1 + \alpha\eta\mu\varphi_2 + \alpha\eta\mu\varphi_3 \\ z_G &= \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi_2, \quad z = \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi_3 \end{aligned} \tag{1}$$

Η κινητική ενέργεια του σύρματος είναι

$$T_1 = \frac{1}{2}\,M\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\,I_G\dot{\varphi}_2^2 = 4m\upsilon_G^2 + 4m\alpha^2\dot{\varphi}_2^2 \tag{2}$$

και η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου Σ είναι

$$T_2 = \frac{1}{2}\,m\upsilon_\Sigma^2 \tag{3}$$

Παραγωγίζοντας τις (1) ως προς t βρίσκουμε

$$\upsilon_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2 = \alpha^2[\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$\upsilon_\Sigma^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = \alpha^2[\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_3) + \tag{4}$$

$$+ 2\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3\sigma\upsilon\nu(\varphi_2 - \varphi_3)]$$

Στην ισορροπία είναι $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_3 = 0$. Κατά τις μικρές ταλαντώσεις τα $\varphi_i$, $\dot{\varphi}_i$ είναι πολύ μικρά. Αν παραλείψουμε από τη

Λαγκρανζιανή τους όρους τρίτης τάξης και πάνω ως προς τις μικρές ποσότητες $\varphi_i$, $\dot{\varphi}_i$, μπορούμε να γράψουμε

$$\eta\mu\varphi_i \simeq \varphi_i, \quad \sigma\upsilon\nu\varphi_i \simeq 1 - \varphi_i^2/2, \quad \dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j\sigma\upsilon\nu(\varphi_i - \varphi_j) \simeq \dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j \tag{5}$$

Άρα οι (4) γίνονται

$$\upsilon_G^2 = \alpha^2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2, \quad \upsilon_\Sigma^2 = \alpha^2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3)^2 \tag{6}$$

Επομένως η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = T_1 + T_2 = 4m\alpha^2[(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 + \dot{\varphi}_2^2] + \frac{m\alpha^2}{2}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3)^2$$

ή

$$T = \frac{m\alpha^2}{2}(9\dot{\varphi}_1^2 + 17\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 18\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + 2\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3) \tag{7}$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$V = -Mgz_G - mgz = -mg(8z_G + z)$$

Παίρνοντας υπόψη τις (1) και τις προσεγγίσεις (5) βρίσκουμε (μετά την παράλειψη των σταθερών όρων)

$$V = \frac{mg\alpha}{2}(9\varphi_1^2 + 9\varphi_2^2 + \varphi_3^2) \tag{8}$$

Η Λαγκρανζιανή $L = T - V$ του συστήματος είναι η διαφορά των (7) και (8). Επειδή έχουμε τρεις βαθμούς ελευθερίας, θα έχουμε τρεις εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0 \quad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{9}$$

Αντικαθιστώντας τις (7), (8) στις (9) βρίσκουμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις των μικρών ταλαντώσεων του συστήματος είναι

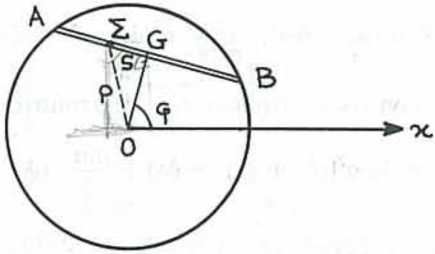
$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{9}\ddot{\varphi}_3 + \frac{g}{\alpha}\varphi_1 = 0$$

$$9\ddot{\varphi}_1 + 17\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3 + \frac{9g}{\alpha}\varphi_2 = 0$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3 + \frac{g}{\alpha}\varphi_3 = 0$$

**14)** Τα άκρα ομογενούς ραβδιού AB είναι υποχρεωμένα, με τη βοήθεια μικρών αβαρών δαχτυλιδιών, να γλυστρούν πάνω σε μία οριζόντια περιφέρεια κύκλου. Ένα έντομο Σ κινείται πάνω στο ραβδί με σταθερή ταχύτητα υ ως προς αυτό.

Λύση




Έστω m η μάζα του εντόμου, M η μάζα του AB, 2l το μήκος του AB και R η ακτίνα του κύκλου. Η θέση του Σ πάνω στο AB είναι πάντοτε γνωστή. Η θέση του AB καθορίζεται εντελώς αν γνωρίζουμε π.χ. τη γωνία φ ανάμεσα στην OG και στον άξονα OX (όπου G είναι το κέντρο μάζας του AB). Το σύστημα λοιπόν ραβδί-έντομο έχει ένα βαθμό ελευθερίας και διαλέγουμε για γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία φ.

Η κινητική ενέργεια του ραβδιού είναι

$$T_1 = \frac{1}{2}\,M\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\,I_G\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\,M(h\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\,\frac{Ml^2}{3}\,\dot{\varphi}^2 = \frac{M}{2}\left(h^2 + \frac{l^2}{3}\right)\dot{\varphi}^2$$

όπου $h = OG$. Αν $s = G\Sigma$, τότε σύμφωνα με το σχήμα οι συντεταγμένες x, y του Σ είναι

$$x = h\sigma\upsilon\nu\varphi - s\eta\mu\varphi, \quad y = h\eta\mu\varphi + s\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Επομένως η κινητική ενέργεια του εντόμου είναι

$$T_2 = \frac{1}{2}\,m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\,[s^2\dot{\varphi}^2 + (\dot{s} - h\dot{\varphi})^2]$$

Η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T_1 + T_2 = \frac{M}{2}\left(h^2 + \frac{l^2}{3}\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\,[s^2\dot{\varphi}^2 + (\dot{s} - h\dot{\varphi})^2] \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας (φ), θα έχουμε μια εξίσωση Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Επειδή $\partial L/\partial\varphi = 0$, η εξίσωση του Lagrange γίνεται

$$p_\varphi = \partial L/\partial\dot{\varphi} = \text{σταθ.} \tag{2}$$

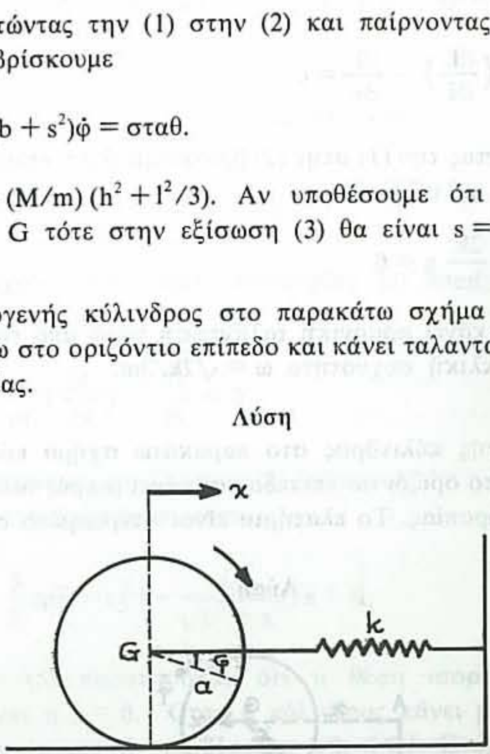
Αντικαθιστώντας την (1) στην (2) και παίρνοντας υπόψη ότι $\dot{s} = \upsilon =$ σταθ. βρίσκουμε

$$(b + s^2)\dot{\varphi} = \text{σταθ.} \tag{3}$$

όπου $b = h^2 + (M/m)(h^2 + l^2/3)$. Αν υποθέσουμε ότι για $t = 0$ το Σ βρίσκεται στο G τότε στην εξίσωση (3) θα είναι $s = \upsilon t$.

15) Ο ομογενής κύλινδρος στο παρακάτω σχήμα κυλάει χωρίς να γλυστράει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο και κάνει ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας.

**Λύση**




Ο κύλινδρος έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη την απομάκρυνση x του κέντρου μάζας G από τη θέση ισορροπίας, δηλαδή τη θέση εκείνη που το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του. Επειδή ο κύλινδρος κυλάει, θα είναι $\dot{x} = \alpha\dot{\varphi}$ και η κινητική ενέργειά του θα είναι

$$T = \frac{1}{2}\,m\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\,I_G\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\,m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{m\alpha^2}{2}\left(\frac{\dot{x}}{\alpha}\right)^2 = \frac{3}{4}\,m\dot{x}^2$$

Η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$V = \frac{1}{2}\, kx^2$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του κυλίνδρου είναι

$$L = T - V = \frac{3}{4}\, m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\, kx^2 \tag{1}$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας (x) θα έχουμε μια εξίσωση Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

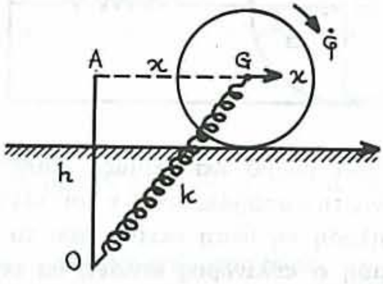
Αντικαθιστώντας την (1) στην (2) βρίσκουμε ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης του κυλίνδρου είναι

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}\, x = 0$$

δηλ. ο κύλινδρος κάνει αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας $x = 0$ με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{2k/3m}$.

16) Ο ομογενής κύλινδρος στο παρακάτω σχήμα κυλάει χωρίς να γλυστράει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο και κάνει μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας. Το ελατήριο είναι στερεωμένο στο O και έχει φυσικό μήκος $l_0$.

Λύση




Ο κύλινδρος έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη την $x = AG$, όπου G είναι το κέντρο μάζας του.

Επειδή ο κύλινδρος κυλάει, θα είναι $x = \alpha\varphi$ και η κινητική ενέργεια του θα είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\, I_G\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\, m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, \frac{m\alpha^2}{2} \left(\frac{\dot{x}}{\alpha}\right)^2 = \frac{3}{4}\, m\dot{x}^2$$

όπου m είναι η μάζα του και α είναι η ακτίνα του.

Η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$V = \frac{1}{2}\, k(OG - l_0)^2 = \frac{1}{2}\, k(\sqrt{h^2 + x^2} - l_0)^2$$

όπου $h = OA$.

Άρα η Λαγκρανζιανή του κυλίνδρου είναι

$$L = T - V = \frac{3}{4}\, m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\, k(\sqrt{h^2 + x^2} - l_0)^2 \tag{1}$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας (x) θα έχουμε μια εξίσωση Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας την (1) στην (2) βρίσκουμε ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης του κυλίνδρου είναι

$$\frac{3}{2}\, m\ddot{x} + k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right)x = 0 \tag{3}$$

Από την (3) παρατηρούμε ότι η θέση ισορροπίας ($\ddot{x} = 0$) του κυλίνδρου είναι η $x = 0$. Όταν ο κύλινδρος κάνει μικρές ταλαντώσεις, τότε το x είναι μικρό ή ακριβέστερα $x/h \ll 1$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε

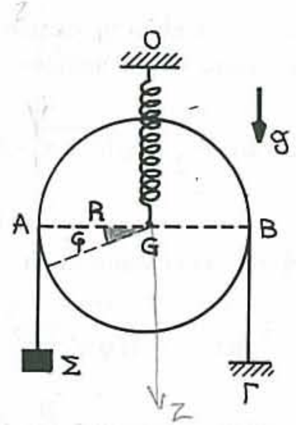
$$\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \left(\frac{x}{h}\right)\left[1 + \left(\frac{x}{h}\right)^2\right]^{-1/2} \simeq \frac{x}{h}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \ldots\right]$$

οπότε η εξίσωση (3) γίνεται (αν παραλείψουμε τους όρους ανώτερης τάξης)

$$\frac{3}{2}\, m\ddot{x} + k\left(1 - \frac{l_0}{h}\right)x + \frac{kl_0}{2h^2}\, x^3 = 0$$

17) Στο παρακάτω σχήμα, το νήμα που συνδέει το σώμα Σ και το έδαφος διά μέσου της κινητής τροχαλίας είναι αβαρές μη εκτατό και δε γλυστράει πάνω στην τροχαλία. Το σώμα Σ και το κέντρο μάζας G της ομογενούς τροχαλίας κινούνται μόνο κατακόρυφα.

Λύση




Ο κατακόρυφος άξονας OZ που δε φαίνεται στο σχήμα έχει την θετική φορά προς τα κάτω. Η θέση του Σ καθορίζεται π.χ. από την απόστασή του z από το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το O. Η θέση της τροχαλίας καθορίζεται από τη θέση $z_G = OG$ του κέντρου μάζας της και από τη γωνία στροφής φ περί το G. Όμως τα z, $z_G$, φ δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους επειδή υπάρχουν δύο δεσμοί. Ο ένας δεσμός είναι ότι το νήμα δε γλυστράει πάνω στην τροχαλία, οπότε η γραμμική ταχύτητα $R\dot{\varphi}$ (ως προς G) των σημείων της περιφέρειάς του θα είναι ίση με την ταχύτητα $(\dot{z} - \dot{z}_G)$ του Σ ως προς το G, δηλαδή

$$R\dot{\varphi} = \dot{z} - \dot{z}_G \qquad (R = GA) \tag{1}$$

ή αν ολοκληρώσουμε

$$R\varphi = z - z_G + c \tag{2}$$

όπου η αυθαίρετη σταθερή c της ολοκλήρωσης υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες τις οποίες διαλέγουμε να είναι

$$t = 0, \quad \varphi = 0, \quad z - z_G = \alpha$$

οπότε από την (2) προκύπτει $c = -\alpha$.

Ο δεύτερος δεσμός είναι ότι το νήμα είναι μη εκτατό, οπότε το μήκος του l είναι σταθερό. Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$l = \Gamma B + \pi R + A\Sigma = d - z_G + \pi R + z - z_G = \sigma\tau\alpha\theta.$$

ή

$$z_G = \frac{z - b}{2} \tag{3}$$

όπου $b = l - d - \pi R$ και d είναι η απόσταση ανάμεσα στα οριζόντια επίπεδα που περνούν από τα Ο και Γ. Επομένως το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη την z. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\, M\dot{z}_G^2 + \frac{1}{2}\, I_G\dot{\varphi}^2$$

όπου m είναι η μάζα του Σ, Μ είναι η μάζα της τροχαλίας και $I_G = MR^2/2$ η ροπή αδράνειας αυτής ως προς G. Χρησιμοποιώντας τις (1) και (3) η T γίνεται

$$T = \frac{1}{2}\, m\dot{z}^2 + \frac{1}{2} M\left(\frac{\dot{z}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{MR^2}{2}\,\left(\frac{\dot{z}}{2R}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\left(m + \frac{3M}{8}\right)\dot{z}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος (μετρημένη από το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το Ο) είναι

$$V_1 = -mgz - Mgz_G = -\left(m + \frac{M}{2}\right)gz + \frac{Mgb}{2}$$

Η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$V_2 = \frac{1}{2}\, k(z_G - l_0)^2 = \frac{1}{2}\, k\, \left(\frac{z - b}{2} - l_0\right)^2$$

όπου k είναι η σταθερή του ελατηρίου και $l_0$ το φυσικό του μήκος.

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι (μετά την παράλειψη της προσθετικής σταθερής Mgb/2)

$$L = T - V = \frac{1}{2}\,\left(m + \frac{3M}{8}\right)\dot{z}^2 + \left(m + \frac{M}{2}\right)gz - \frac{1}{2}\, k\left(\frac{z}{2} - \frac{b}{2} - l_0\right)^2 \tag{4}$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας, θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (5) βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης του συστήματος είναι

$$\left(m + \frac{3M}{8}\right)\ddot{z} - \left(m + \frac{M}{2}\right)g + \frac{k}{2}\left(\frac{z}{2} - \frac{b}{2} - l_0\right) = 0 \qquad (6)$$

Μηδενίζοντας την επιτάχυνση $\ddot{z}$ στην (6) βρίσκουμε ότι η θέση ισορροπίας $z^*$ του συστήματος ικανοποιεί την εξίσωση

$$\left(m + \frac{M}{2}\right)g = \frac{k}{2}\left(\frac{z^*}{2} - \frac{b}{2} - l_0\right) \qquad (7)$$

Αν διαλέγαμε για γενικευμένη συντεταγμένη την απομάκρυνση $x = z - z^*$ του Σ από τη θέση ισορροπίας, τότε, με τη χρησιμοποίηση της (7), η εξίσωση (6) παίρνει την απλούστερη μορφή

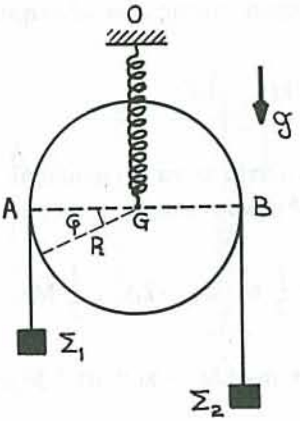
$$\left(m + \frac{3M}{8}\right)\ddot{x} + \frac{k}{4}x = 0$$

18) Το νήμα που συνδέει τα σώματα $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ στο παρακάτω σχήμα είναι αβαρές μη-εκτατό και δε γλυστράει πάνω στην ομογενή τροχαλία. Τα σώματα $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ και το κέντρο μάζας G της τροχαλίας κινούνται μόνο κατακόρυφα.

Λύση

Ο κατακόρυφος άξονας ΟΖ που δε φαίνεται στο σχήμα, διευθύνεται προς τα κάτω. Η θέση των $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ (ως προς Ο) καθορίζεται από τις συντεταγμένες $z_1$ και $z_2$ αντίστοιχα. Η θέση της τροχαλίας ως προς το ακίνητο σύστημα αξόνων Ο καθορίζεται από τη συντεταγμένη $z_G$ του κέντρου μάζας της και από τη γωνία στροφής φ αυτής γύρω από το G. Όμως οι συντεταγμένες $z_1$, $z_2$, $z_G$, φ δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους επειδή υπάρχουν δύο δεσμοί. Ο ένας δεσμός είναι ότι το μήκος l του νήματος είναι σταθερό, δηλαδή

$$l = \Sigma_1 A + \pi R + B\Sigma_2 = z_1 - z_G + \pi R + z_2 - z_G = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (R = GA)$$




ή

$$z_2 = 2z_G - z_1 + \alpha \qquad (\alpha = l - \pi R)$$

Ο δεύτερος δεσμός είναι ότι το νήμα δε γλυστράει πάνω σ τροχαλία, πράγμα που σημαίνει ότι η γραμμική ταχύτητα $R\dot{\varphi}$ ως προς των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας πρέπει να είναι ίση με σχετική (ως προς G) ταχύτητα του νήματος η οποία με τη σειρά της εί ίση με τη σχετική (ως προς G) ταχύτητα $\dot{z}_1 - \dot{z}_G$ του $\Sigma_1$ (ή με τη σχετ ταχύτητα $\dot{z}_2 - \dot{z}_G$ του $\Sigma_2$), δηλαδή

$$R\dot{\varphi} = \dot{z}_1 - \dot{z}_G \quad \Rightarrow \quad R(\varphi - \varphi_0) = z_1 - z_G$$

Επομένως το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγο λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις $z_1$ και $z_G$. Η κινητική ενέργ του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}\, M\dot{z}_G^2 + \frac{1}{2}\, I_G\dot{\varphi}^2$$

όπου $m_1$, $m_2$, M είναι, αντίστοιχα, οι μάζες των $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ και της τροχαλ και $I_G$ είναι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς G. Με τη βοήθ των (1), (2) η T γίνεται

$$T = \frac{1}{2}\, m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2(2\dot{z}_G - \dot{z}_1)^2 + \frac{1}{2}\, M\dot{z}_G^2 + \frac{1}{2}\, \frac{I_G}{R^2}(\dot{z}_1 - \dot{z}_G)^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$V_1 = -mgz_1 - m_2gz_2 - Mgz_G = -m_1gz_1 - m_2g(2z_G - z_1 + \alpha) - Mgz_G$$

και η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$V_2 = \frac{1}{2}\,k(z_G - l_0)^2$$

όπου k και $l_0$ είναι αντίστοιχα η σταθερή και το φυσικό μήκος του ελατηρίου. Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\,m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2(2\dot{z}_G - \dot{z}_1)^2 + \frac{1}{2}\,M\dot{z}_G^2 + \frac{1}{2}\,\frac{I_G}{R^2}(\dot{z}_1 - \dot{z}_G)^2 +$$

$$+ m_1gz_1 + m_2g(2z_G - z_1 + \alpha) + Mgz_G - \frac{1}{2}\,k(z_G - l_0)^2 \tag{3}$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_G}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_G} = 0 \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας την (3) στις (4) βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

$$m_1\ddot{z}_1 - m_2(2\ddot{z}_G - \ddot{z}_1) + \frac{I_G}{R^2}(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_G) - (m_1 - m_2)g = 0$$

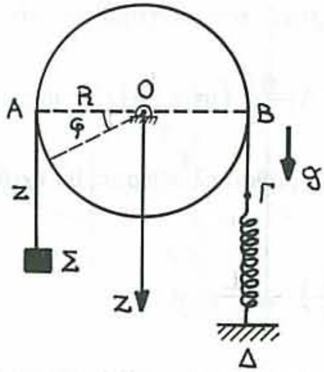
$$2m_2(2\ddot{z}_G - \ddot{z}_1) + M\ddot{z}_G - \frac{I_G}{R^2}(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_G) - (2m_2 + M)\,g + k(z_G - l_0) = 0$$

**19)** Το νήμα που συνδέει το σώμα Σ και το ελατήριο στο παρακάτω σχήμα είναι αβαρές, μη-εκτατό και δε γλυστράει πάνω στην τροχαλία. Το Σ κινείται μόνο κατακόρυφα.

**Λύση**

Η θέση του Σ καθορίζεται π.χ. από το μήκος z = ΑΣ (ως θετική φορά του z διαλέγουμε την $\overrightarrow{\text{ΑΣ}}$) και η θέση της τροχαλίας από τη γωνία στροφής φ γύρω από το ακίνητο κέντρο της Ο. Επειδή το νήμα δε γλυστράει πάνω στην τροχαλία, η ταχύτητα $\dot{z}$ του Σ (άρα και του νήματος) πρέπει να είναι ίση με τη γραμμική ταχύτητα $R\dot{\varphi}$ των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας, δηλαδή

$$\dot{z} = R\dot{\varphi} \qquad (R = OA) \tag{1}$$




Ολοκληρώνοντας την (1) βρίσκουμε

$$z = z_0 + R\varphi \tag{2}$$

Επομένως, το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας και διαλέγουμε για γενικευμένη συντεταγμένη την z.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\, I_0\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_0}{R^2}\right)\dot{z}^2$$

όπου m είναι η μάζα του Σ και $I_0$ η ροπή αδράνειας της τροχαλίας.

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του Σ (μετρημένη από την ΑΒ) είναι $-mgz$. Από το σχήμα προκύπτει ότι το μήκος ΓΔ του ελατηρίου είναι ίσο με

$$\Gamma\Delta = B\Delta - B\Gamma = B\Delta - (l - \pi R - z) = \alpha + z \qquad (\alpha = B\Delta - l + \pi R)$$

όπου l είναι το σταθερό μήκος του νήματος και ΒΔ = γνωστή σταθερή απόσταση. Επομένως η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$\frac{1}{2}\, k(\Gamma\Delta - l_0)^2 = \frac{1}{2}\, k(\alpha + z - l_0)^2$$

όπου k είναι η σταθερή του ελατηρίου και $l_0$ το φυσικό μήκος του. Η δυναμική ενέργεια λοιπόν του συστήματος είναι

$$V = -mgz + \frac{1}{2}\, k(\alpha + z - l_0)^2$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_0}{R^2}\right)\dot{z}^2 + mgz - \frac{1}{2}k(\alpha + z - l_0)^2 \qquad (3)$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (4) βρίσκουμε τελικά ότι η διαφορική εξίσωση της κίνησης του συστήματος είναι

$$\left(m + \frac{I_0}{R^2}\right)\ddot{z} - mg + k(\alpha + z - l_0) = 0 \qquad (5)$$

Μηδενίζοντας την επιτάχυνση $\ddot{z}$ στην (5) βρίσκουμε ότι η θέση ισορροπίας $z^*$ της μάζας m ικανοποιεί την εξίσωση

$$-mg + k(\alpha + z^* - l_0) = 0 \qquad (6)$$

Αν διαλέγαμε για γενικευμένη συντεταγμένη την απομάκρυνση $x = z - z^*$ της m από τη θέση ισορροπίας, τότε, με τη χρησιμοποίηση της (6), η εξίσωση (5) παίρνει την απλή μορφή

$$\left(m + \frac{I_0}{R^2}\right)\ddot{x} + kx = 0$$

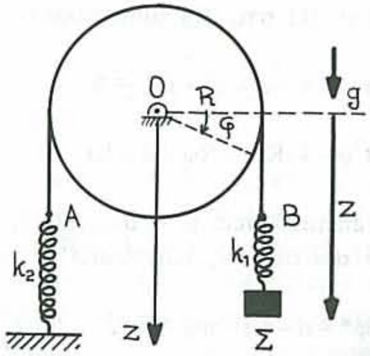
**20)** Το νήμα που συνδέει τα δυο ελατήρια στο παρακάτω σχήμα είναι αβαρές, μη-εκτατό και δε γλυστράει πάνω στην τροχαλία. Το σώμα Σ κινείται κατακόρυφα.

Λύση

Το σύστημα έχει δυο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τη γωνία στροφής φ της τροχαλίας και το ύψος z του Σ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2$$

όπου $I_0$ είναι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς το Ο και m είναι η




μάζα του Σ. Αν μετρήσουμε τη γωνία φ από τη φυσική θέση του συστήματος (δηλαδή πριν τοποθετηθεί το σώμα Σ οπότε τα ελατήρια δεν έχουν τάση και έχουν το φυσικό τους μήκος), τότε η στροφή της τροχαλίας κατά γωνία φ όπως φαίνεται στο σχήμα, ανεβάζει το σημείο Α κατά διάστημα Rφ και κατεβάζει το Β κατά το ίδιο διάστημα. ΄Αρα το φυσικό μήκος του ελατηρίου $k_2$ μεταβάλλεται κατά Rφ ενώ το μήκος του ελατηρίου $k_1$ γίνεται ίσο με $l = z - R\varphi - \delta$, όπου d είναι το ύψος που είχε το Β στη φυσική θέση του συστήματος. Επομένως η δυναμική ενέργεια τάσης των ελατηρίων είναι

$$\frac{1}{2}\,k_2(R\varphi)^2 + \frac{1}{2}\,k_1(z - R\varphi - d - l_0)^2$$

όπου $l_0$ είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου $k_2$.

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του Σ είναι

$$-mgz$$

΄Αρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = \frac{1}{2}\,m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\,I_0\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\,k_2R^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\,k_1(z - R\varphi - d - l_0)^2 + mgz \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (1) στις (2) βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{z} + k_1(z - R\varphi - d - l_0) - mg = 0 \\
&I_0\ddot{\varphi} + k_2R^2\varphi - k_1R(z - R\varphi - d - l_0) = 0
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Μηδενίζοντας τις επιταχύνσεις $\ddot{z}$, $\ddot{\varphi}$ στις (3) βρίσκουμε ότι η θέση ισορροπίας $z^*$, $\varphi^*$ του συστήματος ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$
\begin{aligned}
&k_1(z^* - R\varphi^* - d - l_0) - mg = 0 \\
&k_2R\varphi^* - k_1(z^* - R\varphi^* - d - l_0) = 0
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

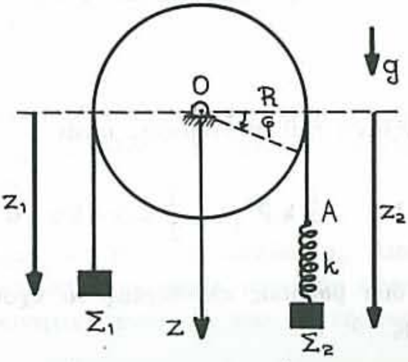
Αν διαλέξουμε σαν νέες γενικευμένες συντεταγμένες τις απομακρύνσεις $\vartheta = \varphi - \varphi^*$, $x = z - z^*$ από τη θέση ισορροπίας, τότε, με τη χρησιμοποίηση των (4) οι εξισώσεις (3) παίρνουν την απλή μορφή

$$m\ddot{x} + k_1(x - R\vartheta) = 0$$

$$I_0\ddot{\vartheta} + k_2R^2\vartheta - k_1R(x - R\vartheta) = 0$$

**21)** Το νήμα που συνδέει το σώμα $\Sigma_1$ και το ελατήριο k είναι αβαρές, μη-εκτατό και δε γλυστράει πάνω στην τροχαλία. Τα σώματα $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ κινούνται κατακόρυφα.

Λύση




Το σύστημα έχει δυο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τα ύψη $z_1$, $z_2$ των $\Sigma_1$, $\Sigma_2$.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}\, I_0\dot{\varphi}^2$$

όπου $m_1$, $m_2$ είναι οι μάζες των $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ και $I_0$ η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς το Ο. Επειδή το νήμα δε γλυστράει πάνω στην τροχαλία, θα είναι $\dot{z}_1 = -R\dot{\varphi}$. Αν μετρήσουμε τη γωνία φ από τη φυσική θέση του συστήματος (δηλαδή πριν τοποθετηθούν τα σώματα $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ οπότε το αβαρές ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του $l_0$, το σημείο Α έχει κάποιο ύψος $d_2$ και το $\Sigma_1$ κάποιο ύψος $d_1$), τότε μια στροφή της τροχαλίας κατά γωνία φ όπως φαίνεται στο σχήμα, κατεβάζει το σημείο Α κατά $R\varphi$. Επομένως το μήκος του ελατηρίου γίνεται ίσο με $l = z_2 - R\varphi - d_2$ και η δυναμική του ενέργεια ίση με

$$\frac{1}{2}\, k(z_2 - R\varphi - d_2 - l_0)^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας των $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ είναι

$$-m_1gz_1 - m_2gz_2$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος, αν πάρουμε υπόψη ότι $\dot{\varphi} = -\dot{z}_1/R$ και $R\varphi = d_1 - z_1$, είναι

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{I_0}{R^2}\right)\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\dot{z}_2^2 - \frac{1}{2}\, k[z_2 + z_1 - d_1 - d_2 - l_0]^2 + m_1gz_1 + m_2gz_2 \quad (1)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0 \quad (i = 1,\, 2) \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (1) στις (2) βρίσκουμε

$$\left(m_1 + \frac{I_0}{R^2}\right)\ddot{z}_1 + k[z_2 + z_1 - d_1 - d_2 - l_0] - m_1g = 0$$

$$m_2\ddot{z}_2 + k[z_2 + z_1 - d_1 - d_2 - l_0] - m_2g = 0 \quad (3)$$

Μηδενίζοντας τις επιταχύνσεις $\ddot{z}_1$, $\ddot{z}_2$ στις (3) βρίσκουμε ότι η θέση ισορροπίας $z_1^*$, $z_2^*$ του συστήματος ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} k[z_2^* + z_1^* - d_1 - d_2 - l_0] - m_1 g = 0 \\ k[z_2^* + z_1^* - d_1 - d_2 - l_0] - m_2 g = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

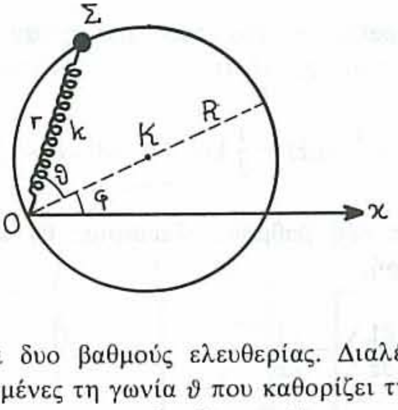
Αν διαλέξουμε σαν νέες γενικευμένες συντεταγμένες τις απομακρύνσεις $x_1 = z_1 - z_1^*$, $x_2 = z_2 - z_2^*$ των $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ από τη θέση ισορροπίας, τότε, με τη χρησιμοποίηση των (4) οι εξισώσεις (3) παίρνουν την απλή μορφή

$$\left(m_1 + \frac{I_0}{R^2}\right)\ddot{x}_1 + k(x_2 + x_1) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 + x_1) = 0$$

**22)** Το υλικό σημείο Σ στο παρακάτω σχήμα μπορεί να κινείται πάνω στο οριζόντιο κυκλικό σύρμα και το σύρμα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το ακίνητο σημείο του Ο.

Λύση




Το σύστημα έχει δυο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τη γωνία $\vartheta$ που καθορίζει τη θέση του Σ πάνω στο σύρμα και τη γωνία $\varphi$ που καθορίζει τη θέση του σύρματος ως προς κάποιο ακίνητο άξονα ΟΧ.

Η κινητική ενέργεια του Σ σε πολικές συντεταγμένες $r = O\Sigma$, $\vartheta + \varphi$ ως προς τον άξονα ΟΧ είναι

$$T_1 = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2] \tag{1}$$

Η κινητική ενέργεια περιστροφής του σύρματος είναι

$$T_2 = \frac{1}{2}\ I_0\dot{\varphi}^2 \tag{2}$$

όπου $I_0$ είναι η ροπή αδράνειας του ως προς το Ο.

Η εξίσωση του σύρματος είναι

$$r = 2R\sigma\upsilon\nu\vartheta \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = -2R\dot{\vartheta}\eta\mu\vartheta \tag{3}$$

Από τις (1), (2), (3) βρίσκουμε ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = T_1 + T_2 = 2mR^2[\eta\mu^2\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 + \sigma\upsilon\nu^2\vartheta(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2] + \frac{1}{2}\ I_0\dot{\varphi}^2$$

Η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$V = \frac{1}{2}\ k(r - l_0)^2 = \frac{1}{2}\ k(2R\sigma\upsilon\nu\vartheta - l_0)^2$$

όπου $l_0$ είναι το φυσικό μήκος του.

Αρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = 2mR^2[\eta\mu^2\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 + \sigma\upsilon\nu^2\vartheta(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2] + \frac{1}{2}\ I_0\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\ k(2R\sigma\upsilon\nu\vartheta - l_0)^2 \tag{1}$$

Αντικαθιστώντας την (1) στις εξισώσεις του Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = 0$$

και παρατηρώντας ότι $\partial L/\partial\varphi = 0$, βρίσκουμε

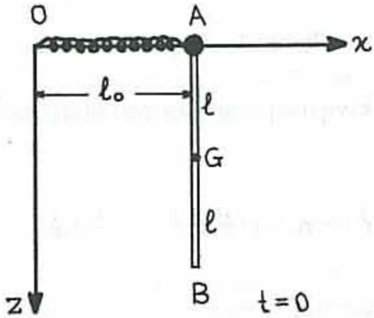
$$4mR^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}) + I_0\dot{\varphi} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\ddot{\vartheta} + \sigma\upsilon\nu^2\vartheta\ddot{\varphi} + \left(\dot{\varphi}^2 - \frac{k}{m}\right)\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta + \frac{kl_0}{2mR}\ \eta\mu\vartheta = 0$$

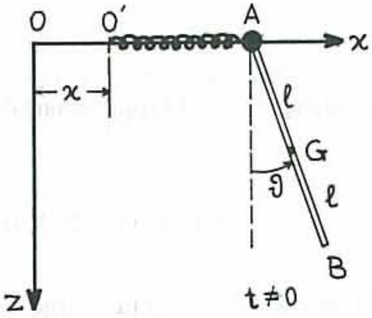
23) Το ραβδί ΑΒ στο παρακάτω σχήμα 2 είναι ομογενές, έχει μήκος 2l, μάζα Μ και είναι υποχρεωμένο να κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο

OXZ. Το υλικό σημείο A έχει μάζα m και είναι υποχρεωμένο να κινείται στον οριζόντιο άξονα X. Το ελατήριο έχει φυσικό μήκος $l_0$ και το άκρο του O κάνει αρμονική ταλάντωση $x = α ημωt$. Το ραβδί κάνει μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας.

Λύση




*Σχήμα 1*




*Σχήμα 2*

Η αρχική θέση ισορροπίας φαίνεται στο σχήμα 1 ενώ στο σχήμα 2 φαίνεται η θέση του συστήματος σε τυχαία στιγμή. Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες την απομάκρυνση $z = x_A - l_0$ του υλικού σημείου A από τη θέση ισορροπίας $x_A = l_0$ και τη γωνία εκτροπής $\vartheta$ του ραβδιού. Από το σχήμα (2) προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας G του ραβδιού είναι

$$x_G = x_A + l ημ\vartheta, \qquad z_G = l συν\vartheta$$

Άρα

$$\dot{x}_G = \dot{x}_A + l\dot{\vartheta} συν\vartheta = \dot{z} + l\dot{\vartheta} συν\vartheta, \qquad \dot{z}_G = -l\dot{\vartheta} ημ\vartheta$$

$$υ_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2 = \dot{z}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + 2l\dot{z}\dot{\vartheta} συν\vartheta$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}\, Mυ_G^2 + \frac{1}{2}\, I_G\dot{\vartheta}^2$$

Παίρνοντας υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις και την $I_G = Ml^2/3$, η T γίνεται

$$T = \frac{1}{2}\,(m + M)\dot{z}^2 + \frac{2}{3}\, Ml^2\dot{\vartheta}^2 + Ml\dot{z}\dot{\vartheta} συν\vartheta \qquad (1)$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$V = -Mgz_G + \frac{1}{2}\,k(O'A - l_0)^2 = -Mgl\sigma\upsilon\nu\vartheta + \frac{1}{2}\,k(x_A - x - l_0)^2 =$$

$$= -Mgl\sigma\upsilon\nu\vartheta + \frac{1}{2}\,k(z - x)^2 = -Mgl\sigma\upsilon\nu\vartheta + \frac{1}{2}\,k(z - \alpha\eta\mu\omega t)^2 \qquad (2)$$

Επειδή οι ταλαντώσεις είναι μικρές, τα μεγέθη $\vartheta$ και $\dot\vartheta$ είναι μικρά. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε συν$\vartheta \simeq 1 - \vartheta^2/2$, οπότε οι σχέσεις (1) και (2) γίνονται σε προσέγγιση όρων δεύτερης τάξης ως προς $\vartheta$ και $\dot\vartheta$

$$T = \frac{1}{2}\,(m + M)\dot z^2 + \frac{2}{3}\,Ml^2\dot\vartheta^2 + Ml\dot z\dot\vartheta \qquad (3)$$

$$V = \frac{1}{2}\,Mgl\vartheta^2 + \frac{1}{2}\,k(z - \alpha\eta\mu\omega t)^2 \qquad (4)$$

Η Λαγκρανζιανή $L = T - V$ του συστήματος είναι η διαφορά των εκφράσεων (3) και (4). Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας ($z$, $\vartheta$) θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0 \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας τις (3), (4) στις (5) βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις των μικρών ταλαντώσεων είναι

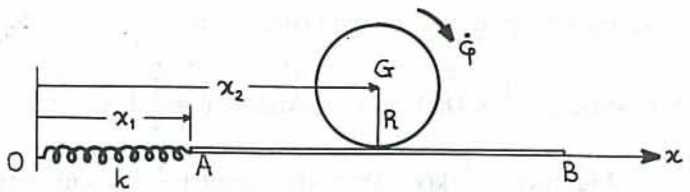
$$(m + M)\ddot z + kz + Ml\ddot\vartheta = k\alpha\eta\mu\omega t$$

$$\frac{4}{3}\,Ml^2\ddot\vartheta + Mgl\vartheta + Ml\ddot z = 0$$

24) Ο ομογενής δίσκος στο παρακάτω σχήμα κυλάει χωρίς να γλυστράει πάνω στην οριζόντια ομογενή σανίδα ΑΒ η οποία συνδέεται με το σταθερό σημείο Ο του άξονα ΟΧ με ελατήριο που έχει σταθερή k και φυσικό μήκος $l_0$. Η σανίδα και ο δίσκος έχουν την ίδια μάζα m και κάνουν ταλαντώσεις.

Λύση

Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις $x_1$ και $x_2$.




Η συνθήκη κύλισης του δίσκου είναι

$$\dot{x}_2 - \dot{x}_1 = R\dot{\varphi}$$

Η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι

$$T_1 = \frac{1}{2}\ m\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\ I_G\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\ m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\ \frac{mR^2}{2}\ \frac{(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2}{R^2}$$

Η σανίδα κινείται μεταφορικά με την ταχύτητα του σημείου Α. Επομένως η κινητική ενέργειά της είναι

$$T_2 = \frac{1}{2}\ m\dot{x}_1^2$$

Άρα η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\ m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{4}\ m(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}\ m\dot{x}_1^2 = \frac{m}{4}\ (3\dot{x}_2^2 + 3\dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2)$$

Η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$V = \frac{1}{2}\ k(x_1 - l_0)^2$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{m}{4}\ (3\dot{x}_1^2 + 3\dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2) - \frac{1}{2}\ k(x_1 - l_0)^2 \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας $(x_1,\ x_2)$ θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2)$$

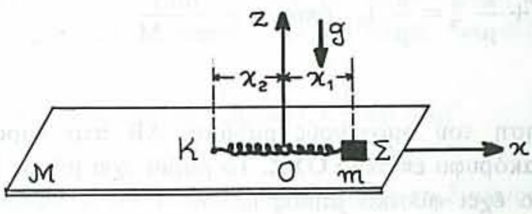
Αντικαθιστώντας την L από την (1) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης είναι

$$3\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 + \frac{2k}{m}(x_1 - l) = 0$$

$$3\dot{x}_2 - \dot{x}_1 = \text{σταθ.}$$

25) Η ομογενής σανίδα στο παρακάτω σχήμα μπορεί να κινείται ελεύθερα κατά μήκος του ακίνητου οριζόντιου άξονα OX. Το σωματίδιο Σ συνδέεται με ελατήριο με το μέσο Κ της σανίδας και μπορεί να κινείται κατά τη διεύθυνση του OX. Η σανίδα έχει μάζα M, το Σ έχει μάζα m και το ελατήριο έχει φυσικό μήκος $l_0$.

Λύση




Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τη θέση $x_1$ του Σ και τη θέση $x_2$ του κέντρου μάζας Κ της πλάκας, ως προς τους ακίνητους άξονες OXZ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2$$

Η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$V = \frac{1}{2}k(x_1 + x_2 - l_0)^2$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1 + x_2 - l_0)^2 \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας ($x_1$, $x_2$), θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2)$$

Αντικαθιστώντας την L από την (1) στις εξισώσεις αυτές, βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

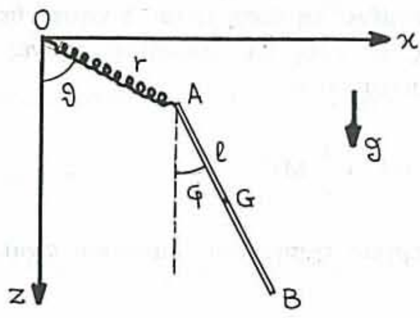
$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 + x_2 - l_0) = 0, \quad M\ddot{x}_2 + k(x_1 + x_2 - l_0) = 0 \qquad (2)$$

Η θέση του Σ ως προς το Κ είναι ίση με $\xi = x_1 + x_2$. Προσθέτοντες κατά μέλη τις εξισώσεις (2) βρίσκουμε ότι η διαφ. εξίσωση της σχετικής κίνησης του Σ είναι

$$\ddot{\xi} + \frac{k}{\mu}\,\xi = \frac{k}{\mu}\,l_0 \quad \text{όπου } \mu = \frac{mM}{m+M}$$

26) Η κίνηση του ομογενούς ραβδιού ΑΒ στο παρακάτω σχήμα γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο ΟΧΖ. Το ραβδί έχει μήκος 2l και μάζα m και το ελατήριο έχει φυσικό μήκος $l_0$.

**Λύση**




Το ραβδί έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις r, ϑ, φ που φαίνονται στο σχήμα. Η κινητική ενέργεια του ραβδιού είναι

$$T = \frac{1}{2}\,m\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\,I_G\dot{\varphi}^2$$

όπου $I_G = ml^2/3$ και $\upsilon_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2$.

Αλλά είναι

$$x_G = r\eta\mu\vartheta + l\eta\mu\varphi, \qquad z_G = r\sigma\upsilon\nu\vartheta + l\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Άρα

$$\dot{x}_G = \dot{r}\eta\mu\vartheta + r\dot{\vartheta}\sigma\upsilon\nu\vartheta + l\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\dot{z}_G = \dot{r}\sigma\upsilon\nu\vartheta - r\dot{\vartheta}\eta\mu\vartheta - l\dot{\varphi}\eta\mu\varphi$$

Επομένως η κινητική ενέργεια γίνεται τελικά

$$T = \frac{m}{2}\,[\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2lr\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu(\varphi - \vartheta) - 2l\dot{r}\dot{\varphi}\eta\mu(\varphi - \vartheta)] + \frac{ml^2}{6}\,\dot{\varphi}^2 \qquad (1)$$

Η δυναμική ενέργεια αποτελείται από τη δυναμική ενέργεια βαρύτητας $-mgz_G$ και από τη δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου, δηλαδή

$$V = -mg(r\sigma\upsilon\nu\vartheta + l\sigma\upsilon\nu\varphi) + \frac{1}{2}\,k(r - l_0)^2 \qquad (2)$$

Η Λαγκρανζιανή του ραβδιού είναι ίση με τη διαφορά των (1) και (2). Αντικαθιστώντας τη Λαγκρανζιανή αυτή στις τρεις εξισώσεις του Lagrange που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες r, $\vartheta$, $\varphi$ βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του ραβδιού είναι

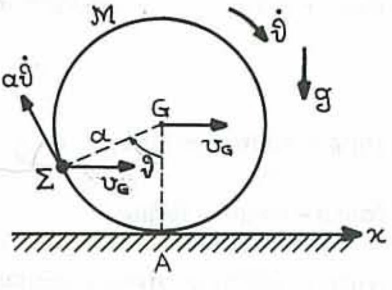
$$m\ddot{r} - ml\ddot{\varphi}\eta\mu(\varphi - \vartheta) - ml\dot{\varphi}^2\sigma\upsilon\nu(\varphi - \vartheta) - mr\dot{\vartheta}^2 + k(r - l_0) - mg\sigma\upsilon\nu\vartheta = 0$$

$$r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} + l\ddot{\varphi}\sigma\upsilon\nu(\varphi - \vartheta) - l\dot{\varphi}^2\eta\mu(\varphi - \vartheta) + g\eta\mu\vartheta = 0$$

$$\frac{4}{3}\,l\ddot{\varphi} + r\ddot{\vartheta}\sigma\upsilon\nu(\varphi - \vartheta) + 2\dot{r}\dot{\vartheta}\sigma\upsilon\nu(\varphi - \vartheta) + r\dot{\vartheta}^2\eta\mu(\varphi - \vartheta) - \ddot{r}\eta\mu(\varphi - \vartheta) + g\eta\mu\varphi = 0$$

27) Ομογενές κυκλικό στεφάνι μπορεί να κυλάει χωρίς να γλυστράει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Στην περιφέρεια του στεφανιού είναι κολημένο ένα υλικό σημείο Σ και το επίπεδο του στεφανιού είναι πάντα κατακόρυφο. Το στεφάνι έχει μάζα M και ακτίνα α και το Σ έχει μάζα m. Το σύστημα κάνει μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας.

Λύση




Στην κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας το υλικό σημείο Σ βρίσκεται στην κατώτατη θέση Α (θέση ελάχιστης δυναμικής ενέργειας). Το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνιακή απομάκρυνση $\vartheta$ του Σ από το Α. Η συνθήκη κύλισης του στεφανιού είναι

$$\upsilon_G = \alpha\dot\vartheta$$

Η κινητική ενέργεια του στεφανιού είναι

$$T_1 = \frac{1}{2}\, I_G\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}\, M\upsilon_G^2 = \frac{1}{2}\, M\alpha^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}\, M\alpha^2\dot\vartheta^2 = M\alpha^2\dot\vartheta^2$$

Η ταχύτητα $\upsilon_\Sigma$ του Σ είναι συνισταμένη της ταχύτητας $\upsilon_G$ του G και της περιστροφικής ταχύτητας $\alpha\dot\vartheta$ του Σ ως προς το G (βλέπε στο σχήμα), δηλαδή

$$\upsilon_\Sigma^2 = \upsilon_G^2 + (\alpha\dot\vartheta)^2 - 2\upsilon_G\alpha\dot\vartheta\text{συν}\vartheta = 2\alpha^2\dot\vartheta^2(1 - \text{συν}\vartheta)$$

Άρα η κινητική ενέργεια του Σ είναι

$$T_2 = \frac{1}{2}\, m\upsilon_\Sigma^2 = m\alpha^2\dot\vartheta^2(1 - \text{συν}\vartheta)$$

Η κινητική ενέργεια λοιπόν του συστήματος είναι

$$T = T_1 + T_2 = (M + m - m\text{συν}\vartheta)\alpha^2\dot\vartheta^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του Σ (μετρημένη από το οριζόντιο επίπεδο και μετά την παράλειψη του σταθερού όρου) είναι

$$V = -mg\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = (M + m - m\sigma\upsilon\nu\vartheta)\alpha^2\dot{\vartheta}^2 + mg\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Επειδή οι ταλαντώσεις γύρω από την ισορροπία $\vartheta = \dot{\vartheta} = 0$ είναι μικρές, τα $\vartheta$, $\dot{\vartheta}$ είναι μικρά και μπορούμε να γράψουμε $\sigma\upsilon\nu\vartheta \simeq 1 - \vartheta^2/2$, οπότε η L γίνεται (μετά την παράλειψη του σταθερού όρου mgα και των όρων τρίτης και ανώτερης τάξης ως προς τις μικρές ποσότητες $\vartheta$, $\dot{\vartheta}$)

$$L = M\alpha^2\dot{\vartheta}^2 - mg\alpha\,\frac{\vartheta^2}{2} \tag{1}$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας ($\vartheta$), θα έχουμε μια εξίσωση Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = 0$$

Αντικαθιστώντας την L από την (1) στην εξίσωση αυτή, βρίσκουμε τελικά

$$\ddot{\vartheta} + \frac{mg}{2M\alpha}\,\vartheta = 0$$

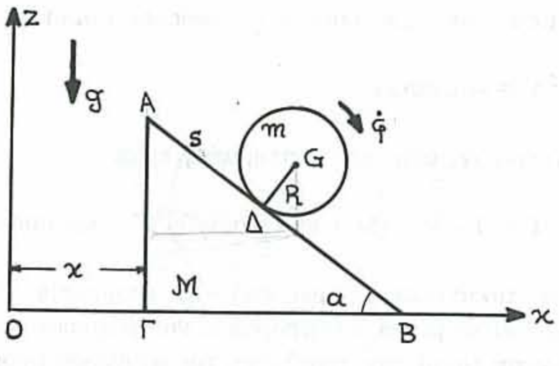
Άρα η κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων είναι ίση με

$$\sqrt{mg/2M\alpha}$$

**28)** Ομογενής κύλινδρος κυλάει χωρίς να γλυστράει πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο το οποίο είναι ελεύθερο να κινείται στο οριζόντιο επίπεδο.

Λύση

Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις $O\Gamma = x$ και $x_G$, όπου G είναι το κέντρο μάζας του κυλίνδρου (ο άξονας του οποίου παραμένει οριζόντιος). Η




κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\, M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, m\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\, I_G\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\,\dot{\varphi}^2$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$z_G = (x - x_G)\varepsilon\varphi\alpha + A\Gamma + R/syna = (x - x_G)\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\tau\alpha\theta.$$

και

$$A\Delta = s = (x_G - x)/\,\sigma\upsilon\nu\alpha - R\varepsilon\varphi\alpha$$

Άρα

$$\dot{z}_G = (\dot{x} - \dot{x}_G)\varepsilon\varphi\alpha, \quad \dot{s} = (\dot{x}_G - \dot{x})/\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Η συνθήκη κύλισης $\dot{s} = R\dot{\varphi}$ δίνει $R\dot{\varphi} = (\dot{x}_G - \dot{x})/\sigma\upsilon\nu\alpha$. Αντικαθιστώντας τα $\dot{z}_G$ και $R\dot{\varphi}$ από τις παραπάνω σχέσεις στην T βρίσκουμε

$$T = \frac{1}{2}\, M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, m[\dot{x}_G^2 + (\dot{x} - \dot{x}_G)^2\varepsilon\varphi^2\alpha] + \frac{m}{4}\,\frac{(\dot{x} - \dot{x}_G)^2}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$

ή

$$T = \frac{1}{2}\, M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, m\dot{x}_G^2 + \frac{mb}{2}\,(\dot{x} - \dot{x}_G)^2$$

όπου $b = \varepsilon\varphi^2\alpha + (2\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^{-1}$.

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του κυλίνδρου $mgz_G$ μετά την παράλειψη του σταθερού όρου γίνεται

$$V = mg(x - x_G)\varepsilon\varphi\alpha$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, m\dot{x}_G^2 + \frac{mb}{2}\,(\dot{x} - \dot{x}_G)^2 - mg\varepsilon\varphi\alpha(x - x_G) \tag{1}$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας $(x,\ x_G)$, θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

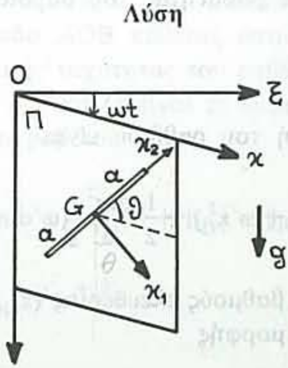
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_G} = 0$$

Αντικαθιστώντας την L από την (1) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} &(M + mb)\ddot{x} - mb\ddot{x}_G + mg\varepsilon\varphi\alpha = 0 \\ &-b\ddot{x} + (1 + b)\ddot{x}_G - g\varepsilon\varphi\alpha = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

29) Ομογενές ραβδί κινείται πάνω σε κατακόρυφο επίπεδο Π το οποίο περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ΟΖ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Το ραβδί έχει μήκος 2α και μάζα m και ο άξονας ΟΖ βρίσκεται πάνω στο Π.

Λύση




Το ραβδί έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις συντεταγμένες $x_G$, $y_G$ του κέντρου μάζας G του ραβδιού και τη γωνία $\vartheta$ του ραβδιού με τον οριζόντιο άξονα ΟΧ. Έστω οι κύριοι άξονες $Gx_1x_2x_3$ (ο $Gx_3$ είναι κάθετος στο επίπεδο Π). Η κινητική ενέργεια του ραβδιού γενικά είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\,(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

όπου $I_1$, $I_2$, $I_3$ είναι οι κύριες ροπές αδράνειας ως προς το G και $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ οι συνιστώσες της στιγμιαίας γωνιακής ταχύτητας ως προς τους κύριους άξονες.

Εδώ είναι

$$I_1 = I_3 = \frac{m\alpha^2}{3}, \quad I_2 = 0, \quad \omega_1 = \omega\sigma\upsilon\nu\vartheta, \quad \omega_3 = \dot{\vartheta}$$

Η απόλυτη ταχύτητα $\upsilon_G$ του κέντρου μάζας G είναι συνισταμένη της σχετικής ταχύτητας $\dot{x}_G$, $\dot{y}_G$ του G και της ταχύτητας $\omega x_G$ με την οποία περιστρέφεται το G γύρω από τον OZ. Επειδή οι συνιστώσες αυτές ταχύτητες είναι κάθετες μεταξύ τους, θα είναι

$$\upsilon_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 + \omega^2 x_G^2$$

Άρα η κινητική ενέργεια του ραβδιού γίνεται

$$T = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 + \omega^2 x_G^2) + \frac{1}{2}\,\frac{m\alpha^2}{3}\,(\omega^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του ραβδιού είναι

$$V = -mgz_G$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του ραβδιού είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2 + \omega^2 x_G^2) + \frac{1}{2}\,\frac{m\alpha^2}{3}\,(\omega^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2) + mgz_G \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε τρεις βαθμούς ελευθερίας ($x_G$, $y_G$, $\vartheta$), θα έχουμε τρεις εξισώσεις Lagrange της μορφής

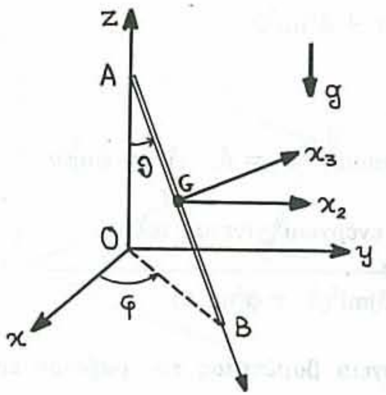
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_G} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_G}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_G} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$$

Αντικαθιστώντες την L από την (1) στις εξισώσεις αυτές, βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του ραβδιού είναι

$$\ddot{x}_G - \omega^2 x_G = 0, \quad \ddot{z}_G - g = 0, \quad 2\ddot{\vartheta} + \omega^2\eta\mu 2\vartheta = 0$$

30) Το ομογενές ραβδί AB στο παρακάτω σχήμα πέφτει με την επίδραση του βάρους του έτσι ώστε το άκρο A να γλυστράει πάνω στον άξονα OZ και το άκρο B να γλυστράει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο OXY. Το ραβδί έχει μάζα m και μήκος 2l.

Λύση




Το ραβδί έχει δυο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες φ και ϑ που φαίνονται στο σχήμα. Αν $x_1$, $x_2$, $x_3$ είναι οι κύριοι άξονες αδράνειας του ραβδιού ως προς το κέντρο μάζας του G (ο άξονας $x_2$ είναι κάθετος στο επίπεδο AOB ενώ ο $x_3$ είναι πάνω στο επίπεδο AOB κάθετος στην AB), $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ είναι οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας του ραβδιού ως προς τους άξονες $x_1$, $x_2$, $x_3$ και $I_1 = 0$, $I_2 = I_3 = ml^2/3$ είναι οι κύριες ροπές αδράνειας, τότε η κινητική ενέργεια του ραβδιού είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\,(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

όπου

$$\upsilon_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 + \dot{z}_G^2$$

Αλλά είναι

$$x_G = l\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad y_G = l\eta\mu\vartheta\eta\mu\varphi, \quad z_G = l\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Άρα

$$\dot{x}_G = l\dot{\vartheta}\sigma\upsilon\nu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi - l\dot{\varphi}\eta\mu\vartheta\eta\mu\varphi$$

$$\dot{y}_G = l\dot{\vartheta}\sigma\upsilon\nu\vartheta\eta\mu\varphi + l\dot{\varphi}\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\dot{z}_G = -l\dot{\vartheta}\eta\mu\vartheta$$

Επομένως είναι

$$\upsilon_G^2 = l^2(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\eta\mu^2\vartheta)$$

Επίσης είναι

$$\omega_1 = -\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\vartheta, \quad \omega_2 = \dot{\vartheta}, \quad \omega_3 = -\dot{\varphi}\eta\mu\vartheta$$

Άρα η κινητική ενέργεια γίνεται τελικά

$$T = (2/3)ml^2(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\eta\mu^2\vartheta)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του ραβδιού είναι

$$V = mgz_G = mgl\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του ραβδιού είναι

$$L = T - V = \frac{2}{3}\, ml^2(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\eta\mu^2\vartheta) - mgl\sigma\upsilon\nu\vartheta \tag{1}$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας ($\varphi$, $\vartheta$), θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0 \tag{2}$$

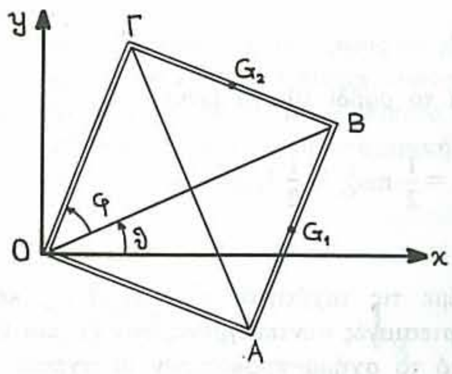
Αντικαθιστώντας την (1) στις (2) βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του ραβδιού είναι

$$\dot{\varphi}\eta\mu^2\vartheta = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (\varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \partial L/\partial\varphi = 0)$$

$$\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta - \frac{3g}{4l}\,\eta\mu\vartheta = 0$$

**31)** Τα τέσσαρα ραβδιά στο παρακάτω σχήμα συνδέονται μεταξύ τους με αρθρώσεις στα σημεία Ο, Α, Β, Γ και μπορούν να κινούνται στο οριζόντιο επίπεδο. Η κορυφή Ο παραμένει ακίνητη. Τα ραβδιά είναι όμοια, ομογενή, έχουν μάζα m και μήκος 2α.

Λύση




Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες $\vartheta = (\widehat{OX, OB})$ και $\varphi = (\widehat{OB, O\Gamma})$. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = T_{OA} + T_{AB} + T_{B\Gamma} + T_{O\Gamma}$$

Τα ραβδιά ΟΓ και ΟΑ περιστρέφονται γύρω από το Ο με γωνιακές ταχύτητες ίσες με

$$\frac{d}{dt}(\widehat{OX, O\Gamma}) = \frac{d}{dt}(\vartheta + \varphi) = \dot{\vartheta} + \dot{\varphi}$$

και

$$\frac{d}{dt}(\widehat{OX, OA}) = \frac{d}{dt}[2\pi - (\varphi - \vartheta)] = \dot{\vartheta} - \dot{\varphi}$$

αντίστοιχα (επειδή το τετράπλευρο ΟΑΒΓ είναι ρόμβος).

Άρα θα είναι

$$T_{O\Gamma} = \frac{1}{2} I_0(\dot{\vartheta} + \dot{\varphi})^2, \quad T_{OA} = \frac{1}{2} I_0(\dot{\vartheta} - \dot{\varphi})^2$$

όπου $I_0 = \frac{4}{3} m\alpha^2$.

Το ραβδί ΑΒ κάνει μια μεταφορική κίνηση (κίνηση του κέντρου μάζας $G_1$) και μια περιστροφική γύρω από το $G_1$ με γωνιακή ταχύτητα ίση με $(\vartheta + \varphi)$. Άρα θα είναι

$$T_{AB} = \frac{1}{2} m\upsilon^2_{G_1} + \frac{1}{2} I_{G_1}(\dot{\vartheta} + \dot{\varphi})^2$$

όπου $I_{G_1} = \frac{1}{3} m\alpha^2$.

Ανάλογα, για το ραβδί ΒΓ θα είναι

$$T_{B\Gamma} = \frac{1}{2} m\upsilon^2_{G_2} + \frac{1}{2} I_{G_2}(\dot{\vartheta} - \dot{\varphi})^2$$

όπου $I_{G_2} = I_{G_1}$.

Για να βρούμε τις ταχύτητες $\upsilon^2_{G_1} = \dot{x}^2_{G_1} + \dot{y}^2_{G_1}$ και $\upsilon^2_{G_2} = \dot{x}^2_{G_2} + \dot{y}^2_{G_2}$, βρίσκουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες των $G_1$ και $G_2$ ως συναρτήσεις των $\varphi$ και $\vartheta$. Από το σχήμα προκύπτουν οι σχέσεις

$$x_{G_1} = 2\alpha\sigma\upsilon\nu(\vartheta - \varphi) + \alpha\sigma\upsilon\nu(\vartheta + \varphi), \quad y_{G_1} = 2\alpha\eta\mu(\vartheta - \varphi) + \alpha\eta\mu(\vartheta + \varphi)$$

$$x_{G_2} = 2\alpha\sigma\upsilon\nu(\vartheta + \varphi) + \alpha\sigma\upsilon\nu(\vartheta - \varphi), \quad y_{G_2} = 2\alpha\eta\mu(\vartheta + \varphi) + \alpha\eta\mu(\vartheta - \varphi)$$

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις αυτές ως προς το χρόνο βρίσκουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας των $G_1$ και $G_2$ και κατόπιν τις ποσότητες $\upsilon^2_{G_1}$ και $\upsilon^2_{G_2}$. Μετά την εκτέλεση των πράξεων, προκύπτει ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με

$$T = \frac{1}{3} m\alpha^2[(5 + 3\sigma\upsilon\nu 2\varphi)\dot{\vartheta}^2 + (5 - 3\sigma\upsilon\nu 2\varphi)\dot{\varphi}^2] \qquad (1)$$

Επειδή η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με μηδέν, η Λαγκρανζιανή του θα είναι ίση με την κινητική ενέργεια, δηλ. $L = T$.

Οι εξισώσεις του Lagrange για τις συντεταγμένες $\vartheta$ και $\varphi$ είναι αντίστοιχα

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

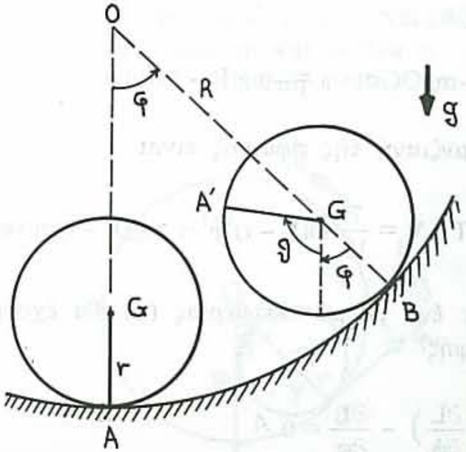
Αντικαθιστώντας την L από την (1) στις εξισώσεις αυτές, προκύπτουν τελικά οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις της κίνησης

$$(5 + 3\sigma\upsilon\nu 2\varphi)\dot{\vartheta} = \sigma\tau\alpha\theta. \quad \left(\varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0\right)$$

$$(5 - 3\sigma\upsilon\nu 2\varphi)\ddot{\varphi} + 3(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2)\eta\mu 2\varphi = 0$$

32) Ομογενής σφαίρα με ακτίνα r κυλάει χωρίς να γλυστράει, με την επίδραση του βάρους της, στο εσωτερικό σταθερής σφαιρικής επιφάνειας με ακτίνα R. Η κίνηση γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο που περνάει από το κέντρο O και το κατώτατο σημείο A της σφαιρικής επιφάνειας.

Λύση




Έστω φ η γωνιακή θέση του κέντρου μάζας G της σφαίρας. Αν το G κινηθεί κατά γωνία φ, η σφαίρα περιστρέφεται κατά γωνία $\vartheta$ (η GA είναι σταθερή ευθεία της σφαίρας). Η σφαίρα έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένη συντεταγμένη τη γωνία φ.

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\, I_G \dot{\vartheta}^2$$

όπου $I_G = \dfrac{2mr^2}{5}$.

Επειδή το G διαγράφει περιφέρεια με κέντρο O και ακτίνα ίση με R - r, η ταχύτητά του θα είναι $\upsilon_G = (R - r)\dot{\varphi}$.

Η συνθήκη κύλισης είναι

$$\widehat{AB} = \widehat{BA'}$$

ή

$$R\varphi = r(\varphi + \vartheta) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vartheta} = \left(\frac{R-r}{r}\right)\dot{\varphi}$$

Επομένως η κινητική ενέργεια γίνεται

$$T = \frac{1}{2}\ m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\ \frac{2mr^2}{5}\ \left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\varphi}^2 = \frac{7}{10}\ m(R-r)^2\dot{\varphi}^2$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της σφαίρας (μετρημένη από το O) είναι

$$V = -mgOG\text{συν}\varphi = -mg(R-r)\text{συν}\varphi$$

Άρα η Λαγκρανζιανή της σφαίρας είναι

$$L = T - V = \frac{7}{10}\ m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + mg(R-r)\text{συν}\varphi \tag{1}$$

Επειδή έχουμε ένα βαθμό ελευθερίας (φ), θα έχουμε μία εξίσωση Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Αντικαθιστώντας την L από την (1) στην εξίσωση αυτή βρίσκουμε τελικά

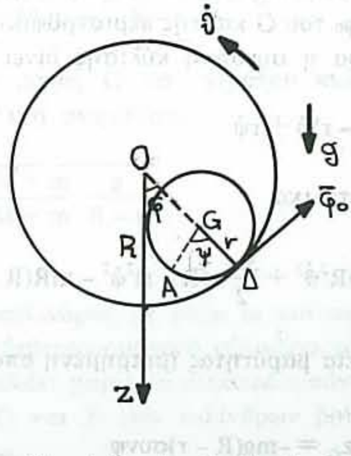
$$\ddot{\varphi} + \frac{5g}{7(R-r)}\ \text{ημ}\varphi = 0 \tag{2}$$

Η θέση ευσταθούς ισορροπίας της σφαίρας είναι η κατώτατη θέση του G δηλ. η $\varphi = 0$. Για μικρές απομακρύνσεις φ από τη θέση αυτή μπορούμε να γράψουμε ημφ $\approx$ φ οπότε η (2) παριστάνει αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{5g/7(R-r)}$.

Όταν η σφαίρα τείνει να γίνει υλικό σημείο ($r \to 0$) τότε $\omega \to \sqrt{5g/7r}$. Θα περίμενε κανείς ότι στο όριο $r \to 0$ να εύρισκε τη συχνότητα $\sqrt{g/R}$ του απλού εκκρεμούς γιατί η σφαίρα γίνεται υλικό σημείο με μηδενική ροπή αδράνειας. Υπεύθυνος για την παρουσία του παράγοντα 5/7 στην ω όταν $r \to 0$, είναι η κύλιση. Εάν δεν υπήρχε καθόλου τριβή η σφαίρα θα γλυστρούσε μόνο χωρίς να κυλάει και θα είχαμε $\omega \to \sqrt{g/R}$ για $r \to 0$. Ώστε, όταν υπάρχει κύλιση, οσοδήποτε μικρή και αν είναι η σφαίρα δεν κινείται όπως θα κινιόταν ένα υλικό σημείο με την ίδια μάζα, δηλαδή δεν μπορεί να θεωρηθεί (από τη δυναμική άποψη) ως υλικό σημείο.

33) Ομογενής κούφιος κύλινδρος μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από το σταθερό οριζόντιο άξονά του. Δεύτερος ομογενής γεμάτος κύλινδρος μπορεί να κυλάει χωρίς να γλυστράει στο εσωτερικό του πρώτου. Το σύστημα κάνει μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας. Ο κούφιος κύλινδρος έχει μάζα M και ακτίνα R και ο γεμάτος κύλινδρος έχει μάζα m και ακτίνα r.

Λύση




Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τη γωνία $\vartheta$ η οποία μετράει την περιστροφή του κούφιου κυλίνδρου γύρω από τον άξονά του και τη γωνία $\varphi = (\widehat{OZ, OG})$. Η γωνία ψ στο σχήμα μετράει την περιστροφή του γεμάτου κυλίνδρου γύρω από τον άξονά του. Η κινητική ενέργεια του κούφιου κυλίνδρου είναι ίση με

$$\frac{1}{2}\, I_0 \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}\, MR^2 \dot{\vartheta}^2$$

και του γεμάτου κυλίνδρου είναι ίση με

$$\frac{1}{2}\, m\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\, I_G\dot{\psi}^2,$$

όπου $I_G = \frac{mr^2}{2}$.

Άρα η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\, MR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\, m\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\,\frac{mr^2}{2}\,\dot{\psi}^2$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας G του γεμάτου κυλίνδρου είναι ίση με $\upsilon_G = (R - r)\dot{\varphi}$. Για να εκφράσουμε τη γωνία ψ ως συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων $\vartheta$ και φ, θεωρούμε τη συνθήκη κύλισης των κυλίνδρων στο Δ, δηλαδή ότι η απόλυτη ταχύτητα του σημείου Δ του κούφιου κυλίνδρου πρέπει να είναι ίση προς την απόλυτη ταχύτητα του σημείου Δ του γεμάτου κυλίνδρου. Η ταχύτητα του Δ για τον κούφιο κύλινδρο είναι ίση με $R\dot{\vartheta}\varphi_0$ και για τον γεμάτο είναι ίση με το άθροισμα της ταχύτητας $(R - r)\dot{\varphi}\varphi_0$ του G και της περιστροφικής ταχύτητας $r\dot{\psi}\varphi_0$ του Δ ως προς το G. Άρα η συνθήκη κύλισης δίνει

$$R\dot{\vartheta} = (R - r)\dot{\varphi} + r\dot{\psi}$$

Άρα η T γίνεται τελικά

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(M + \frac{m}{2}\right)R^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{3m}{2}\,(R - r)^2\dot{\varphi}^2 - mR(R - r)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\right]$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας (μετρημένη από το O) του συστήματος είναι

$$V = -mgz_G = -mg(R - r)\text{συν}\varphi$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left[\left(M + \frac{m}{2}\right)R^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{3m}{2}\,(R - r)^2\dot{\varphi}^2 - mR(R - r)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\right]$$

$$+\, mg(R - r)\text{συν}\varphi \qquad (1)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας ($\vartheta$, φ), θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Αντικαθιστώντες την L από την (1) στις εξισώσεις αυτές, βρίσκουμε τελικά

$$\begin{aligned} &(2M + m)R\ddot{\vartheta} + m(r - R)\ddot{\varphi} = 0 \\ &R\ddot{\vartheta} + 3(r - R)\ddot{\varphi} - 2g\eta\mu\varphi = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Η κατώτατη θέση του G (δηλαδή $\varphi = 0$) είναι η θέση ευσταθούς ισορροπίας του συστήματος. Για μικρές μετατοπίσεις φ από τη θέση ισορροπίας, μπορούμε να γράψουμε $\eta\mu\varphi \approx \varphi$ και αν απαλείψουμε τη $\ddot{\vartheta}$ από τις (2) βρίσκουμε

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{2M + m}{3M + m}\right) \frac{g}{R - r}\,\varphi = 0 \tag{3}$$

δηλαδή το κέντρο μάζας G του γεμάτου κυλίνδρου κάνει αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα

$$\sqrt{\frac{2M + m}{3M + m}\,\frac{g}{R - r}}\,.$$

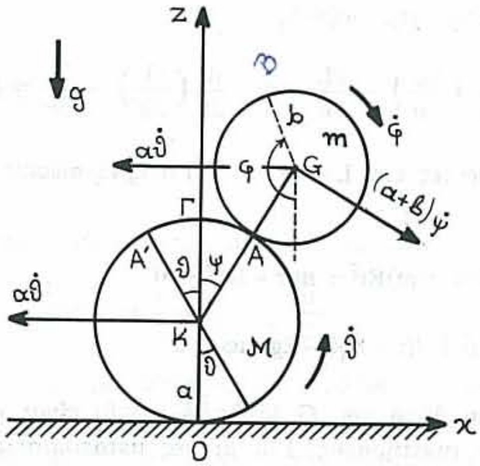
34) Ομογενής κύλινδρος με μάζα m και ακτίνα b κυλάει χωρίς να γλυστράει πάνω σε δεύτερο ομογενή κύλινδρο, με μάζα M και ακτίνα α, ο οποίος μπορεί να κυλάει χωρίς να γλυστράει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Τα κέντρα μάζας G και K των κυλίνδρων βρίσκονται πάντα στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

Λύση

Έστω ΚΑ΄ και GB σταθερές ευθείες των κυλίνδρων K και G αντίστοιχα, ϑ και φ οι γωνίες των ευθειών αυτών με την κατακόρυφη και ψ η γωνία της KG με την κατακόρυφη. Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Διαλέγουμε λοιπόν για γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες ϑ και ψ.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\,M\upsilon_k^2 + \frac{1}{2}\,I_k\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\,m\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}\,I_G\dot{\varphi}^2$$




όπου $I_k = \frac{M\alpha^2}{2}$ και $I_G = \frac{mb^2}{2}$ και η δυναμική ενέργεια βαρύτητας (μετρημένη από το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το K) είναι

$$V = mg(\alpha + b)\text{συν}\psi$$

Η απόλυτη ταχύτητα του κέντρου μάζας K του κάτω κυλίνδρου είναι

$$\upsilon_k = \alpha\dot{\vartheta} \quad \text{(συνθήκη κύλισης του κυλίνδρου K)} \tag{2}$$

Η απόλυτη κίνηση του κέντρου μάζας G του πάνω κυλίνδρου είναι συνισταμένη της περιστροφής του γύρω από το K με ταχύτητα $(\alpha + b)\dot{\psi}$ και της μεταφορικής κίνησης του K με ταχύτητα $\alpha\dot{\vartheta}$. Επειδή οι συνιστώσες αυτές ταχύτητες σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $180^0 - \psi$, θα είναι

$$\upsilon_G^2 = \alpha^2\dot{\vartheta}^2 + (\alpha + b)^2\dot{\psi}^2 - 2\alpha(\alpha + b)\dot{\vartheta}\dot{\psi}\text{συν}\psi \tag{3}$$

Η κύλιση του πάνω κυλίνδρου στον κάτω εκφράζεται από τη σχέση

$$\widehat{AA'} = \widehat{AB} \quad \text{ή} \quad \alpha(\vartheta + \psi) = b(\varphi - \psi)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή βρίσκουμε

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha}{b}\,\dot{\vartheta} + \left(\frac{\alpha + b}{b}\right)\dot{\psi} \tag{4}$$

Χρησιμοποιώντας τις (1)-(4), η Λαγκρανζιανή του συστήματος γίνεται τελικά

$$L = T - V = \frac{3m}{4}(\alpha + b)^2\dot{\psi}^2 + \frac{3}{4}(m + M)\alpha^2\dot{\vartheta}^2 +$$

$$+ \frac{m\alpha}{2}(\alpha + b)(1 - 2\sigma\upsilon\nu\psi)\dot{\psi}\dot{\vartheta} - mg(\alpha + b)\sigma\upsilon\nu\psi \qquad (5)$$

Επειδή έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας ($\vartheta$, $\psi$), θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange της μορφής

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$

Αντικαθιστώντας την L από την (5) στις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

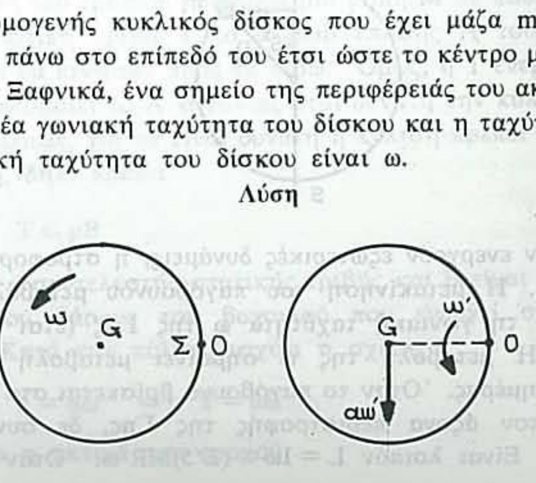
$$3(m + M)\alpha^2\dot{\vartheta} + m\alpha(\alpha + b)(1 - 2\sigma\upsilon\nu\psi)\dot{\psi} = \sigma\tau\alpha\theta. \quad (\text{επειδή } \partial L/\partial\vartheta = 0)$$

$$3(\alpha + b)\ddot{\psi} + \alpha(1 - 2\sigma\upsilon\nu\psi)\ddot{\vartheta} - 2g\eta\mu\psi = 0$$

## *$\beta_2$: Άλλες μέθοδοι*

1) Ένας ομογενής κυκλικός δίσκος που έχει μάζα m και ακτίνα α περιστρέφεται πάνω στο επίπεδό του έτσι ώστε το κέντρο μάζας του G να είναι ακίνητο. Ξαφνικά, ένα σημείο της περιφέρειάς του ακινητοποιείται. Να βρεθεί η νέα γωνιακή ταχύτητα του δίσκου και η ταχύτητα του G. Η αρχική γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι ω.

Λύση



Έστω O το σημείο του χώρου που συμπίπτει με το σημείο Σ της περιφέρειας που ακινητοποιήθηκε. Επειδή η εξωτερική δύναμη που ακινητοποίησε το Σ περνάει από το O, η ροπή της ως προς το O είναι μηδενική. Επομένως, η στροφορμή $L_0$ του δίσκου ως προς το O διατηρείται σταθερή, δηλ. είναι ίδια πριν και μετά την ακινητοποίηση του O. Επειδή αρχικά το G είναι ακίνητο, η στροφορμή $L_0$ του δίσκου ως προς το O είναι ίση με τη στροφορμή $L_G = I_G \omega = \frac{1}{2} m\alpha^2\omega$ του δίσκου ως προς το G. Μετά την ακινητοποίηση του Σ, η $L_0$ αποτελείται από την $L_G' = I_G\omega' = \frac{1}{2} m\alpha^2\omega'$ και τη στροφορμή $m\upsilon_G\alpha = m\alpha^2\omega'$ που οφείλεται στην κίνηση του G ως προς το O. Άρα θα είναι

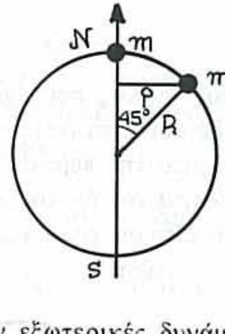
$$L_0 = \frac{1}{2} m\alpha^2\omega = \frac{1}{2} m\alpha^2\omega' + m\alpha^2\omega'$$

ή

$$\omega' = \omega/3 \quad \text{και} \quad \upsilon_G' = \alpha\omega' = \alpha\omega/3$$

**2)** Αν η Γη θεωρηθεί ως ομογενής σφαίρα με μάζα $M = 6 \cdot 10^{21}$ τόννους, να υπολογιστεί η μεταβολή της διάρκειας της ημέρας που οφείλεται στη μετακίνηση ενός παγόβουνου από το Βόρειο Πόλο μέχρι γεωγραφικό πλάτος $45^0$. Η μάζα του παγόβουνου είναι $m = 10^{10}$ τόννοι.

Λύση




Επειδή δεν ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις, η στροφορμή L της Γης είναι σταθερή. Η μετακίνηση του παγόβουνου μεταβάλλει τη ροπή αδράνειας και τη γωνιακή ταχύτητα ω της Γης (έτσι ώστε η L να διατηρείται). Η μεταβολή της ω σημαίνει μεταβολή στη διάρκεια $T = 2\pi/\omega$ της ημέρας. Όταν το παγόβουνο βρίσκεται στο Βόρειο Πόλο, δηλ. πάνω στον άξονα περιστροφής της Γης, δε συνεισφέρει στη στροφορμή L. Είναι λοιπόν $L = I\omega = (2/5)MR^2\omega$. Όταν βρίσκεται σε πλάτος $45^0$, συνεισφέρει κατά $m\rho^2\omega' = mR^2\sigma\upsilon\nu^2 45^0\omega' = mR^2\omega'/2$, όπου R είναι η ακτίνα της Γης και $\omega' = \omega + \delta\omega$ είναι η γωνιακή ταχύτητα της Γης τη στιγμή εκείνη. Άρα η συνολική στροφορμή είναι $L = (2/5)MR^2(\omega')^2 + mR^2\omega'/2$, οπότε η διατήρηση της στροφορμής δίνει

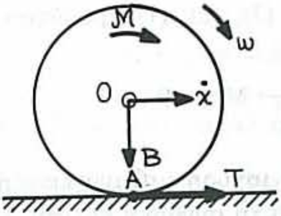
$$L = \frac{2}{5}\ MR^2\omega = \left(\frac{2}{5}\ MR^2 + \frac{1}{2}\ mR^2\right)(\omega + \delta\omega)$$

Άρα
$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\ \frac{m}{\dfrac{4M}{5} + m} \simeq -\ \frac{5}{4}\,\frac{m}{M} = -\ \frac{5}{24}\cdot 10^{-11} \quad (m \ll M)$$

Αλλά $\delta T/T = -\delta\omega/\omega$ ή $\delta T = -T(\delta\omega/\omega) = 0.18$ μsec.

3) Να εξηγηθεί γιατί μια ισχυρή μηχανή τραίνου δεν πρέπει να τοποθετείται σε ελαφρύ βαγόνι.

Λύση




Η μηχανή του τραίνου προκαλεί μια ροπή M σε κάθε τροχό. Αν δεν υπήρχε η στατική τριβή T το σημείο επαφής A του τροχού με τη σιδηροτροχιά θα κινιόταν προς τα πίσω. Όμως, η T ενεργώντας προς τα εμπρός, ακινητοποιεί το A κάνοντας έτσι δυνατή την κύλιση του τροχού. Όπως γνωρίζουμε, για να είναι δυνατή η κύλιση πρέπει η T να μη είναι πολύ μεγάλη, δηλ. πρέπει

$$T \leqslant \mu B \tag{1}$$

όπου μ είναι ο συντελεστής στατικής τριβής και B είναι το τμήμα εκείνο του συνολικού βάρους του βαγονιού που ενεργεί στον τροχό που εξετάζουμε. Κατά την κύλιση ισχύει η σχέση

$$\dot{x} = \alpha\omega \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \alpha\dot{\omega} \tag{2}$$

όπου α είναι η ακτίνα του τροχού.

Η κίνηση του Ο υπακούει στην εξίσωση

$$m\ddot{x} = T \tag{3}$$

δηλ. η στατική τριβή είναι η δύναμη στην οποία οφείλεται η κίνηση του τραίνου. Η περιστροφική κίνηση του τροχού υπακούει στην εξίσωση

$$\frac{dL_A}{dt} = M \tag{4}$$

όπου η στροφορμή $L_A$ του τροχού ως προς το ακίνητο σημείο Α είναι ίση με

$$L_A = I_0\omega + \alpha m\dot{x} = I_0\omega + \alpha^2 m\omega = (I_0 + m\alpha^2)\omega$$

όπου $I_0$ είναι η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς το 0.
Άρα η (4) γίνεται

$$(I_0 + m\alpha^2)\dot{\omega} = M \tag{5}$$

Από τις σχέσεις (5), (3), (2), (1) προκύπτει ότι

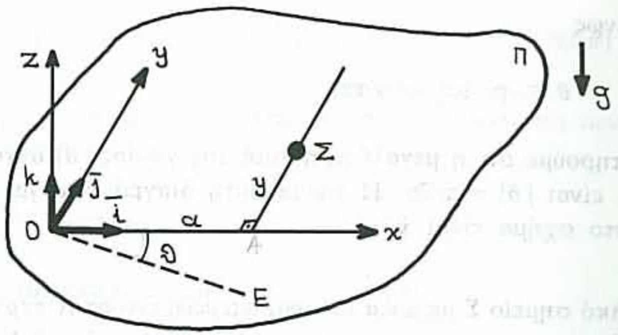
$$T = \frac{m\alpha}{I_0 + m\alpha^2}\cdot M \leqslant \mu B \tag{6}$$

Παρατηρούμε ότι μια ισχυρή μηχανή επειδή δίνει μεγάλη ροπή Μ, δεν μπορεί να ικανοποιήσει τη συνθήκη κύλισης (6) όταν το βάρος Β είναι μικρό. Στην περίπτωση αυτή οι τροχοί θα γυρίζουν και το τραίνο θα μένει ακίνητο. Ώστε για να υπάρχει κύλιση, οι μεγάλες ροπές (δηλ. οι ισχυρές μηχανές) απαιτούν μεγάλο βάρος.

4) Μια πλάκα Π μπορεί να περιστρέφεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο γύρω από ένα σημείο της Ο που είναι ακίνητο στο χώρο. Ένα έντομο Σ που κάθεται σε ένα σημείο Α της πλάκας, αρχίζει να βαδίζει διαγράφοντας ευθεία γραμμή ΑΣ (πάνω στην πλάκα) που είναι κάθετη στην ΟΑ. Αν m είναι η μάζα του εντόμου, $mk^2$ η ροπή αδράνειας της πλάκας ως προς το Ο και ΟΑ = α, να αποδειχτεί ότι η γωνία που θα έχει διαγράψει η πλάκα γύρω από το Ο δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από $\pi/2p$ όπου $p^2 = (\alpha^2 + k^2)/\alpha^2$.

Λύση

Έστω ΟΧΥΖ σύστημα αξόνων πάνω στην πλάκα και ΟΕ ακίνητη




ευθεία του οριζόντιου επιπέδου. Επειδή η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το Ο είναι μηδέν, η στροφορμή του συστήματος πλάκα+έντομο ως προς το Ο διατηρείται σταθερή, δηλ. ίση με μηδέν, επειδή το σύστημα αρχικά ισορροπούσε. Καθώς το Σ κινείται, η πλάκα αρχίζει να περιστρέφεται με κάποια γωνιακή ταχύτητα $\omega = \dot{\vartheta}\mathbf{k}$ όπου $\vartheta$ είναι η γωνία ανάμεσα στην ακίνητη ευθεία ΟΕ και στον άξονα x.

Η σχετική (ως προς την πλάκα) ταχύτητα του Σ είναι $\mathbf{u} = \dot{y}\mathbf{j}$. Άρα η απόλυτη ταχύτητά του είναι

$$\upsilon = \mathbf{u} + \omega \times \overrightarrow{O\Sigma} = \dot{y}\mathbf{j} + \dot{\vartheta}\mathbf{k} \times (\alpha\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = -x\dot{\vartheta}\mathbf{i} + (\dot{x} + \alpha\dot{\vartheta})\mathbf{j}$$

Άρα η στροφορμή του Σ ως προς το Ο είναι

$$L_\Sigma = \overrightarrow{O\Sigma} \times m\upsilon = m[\alpha\dot{x} + (\alpha^2 + x^2)\dot{\vartheta}]\mathbf{k}$$

Η στροφορμή της πλάκας ως προς το Ο είναι

$$L_\pi = mk^2\omega = mk^2\dot{\vartheta}\mathbf{k}$$

Πρέπει να είναι

$$L_\Sigma + L_\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\dot{x} + (\alpha^2 + x^2 + k^2)\dot{\vartheta} = 0 \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι αν είναι $\dot{x} > 0$, τότε θα είναι $\dot{\vartheta} < 0$ και αντίστροφα, δηλ. η πλάκα περιστρέφεται με φορά αντίθετη προς τη φορά της κίνησης του Σ πάνω της. Από την (1) προκύπτει ότι

$$\int_0^\vartheta d\vartheta = -\int_0^x \frac{\alpha dx}{\alpha^2 p^2 + x^2}$$

όπου $p^2 = (\alpha^2 + k^2)/\alpha^2$.

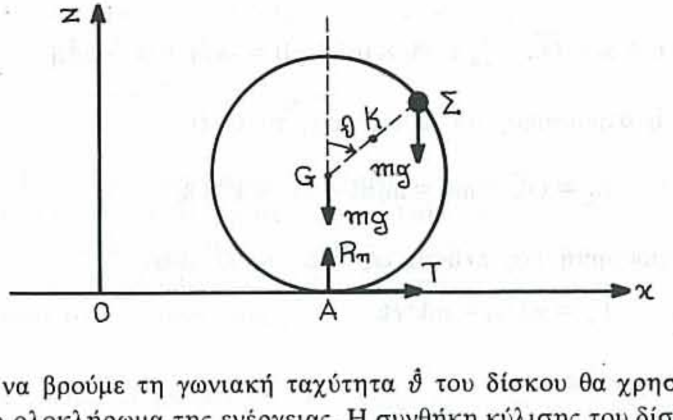
Επομένως

$$\vartheta = -p^{-1}\text{τοξεφ}(x/\alpha p)$$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή της γωνίας $|\vartheta|$ αντιστοιχεί σε $x \to \infty$ και είναι $|\vartheta| \to \pi/2p$. Η γωνία αυτή διαγράφεται με φορά $\dot{\vartheta} < 0$ (εφόσον στο σχήμα είναι $\dot{x} > 0$).

5) Υλικό σημείο Σ με μάζα m είναι στερεωμένο στην περιφέρεια ενός κυκλικού δίσκου που είναι ομογενής έχει μάζα m ακτίνα α και κέντρο G. Αρχικά ο δίσκος κρατιέται ακίνητος, με το επίπεδο του κατακόρυφο, ακουμπώντας πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και η GΣ σχηματίζει γωνία $\vartheta = 60^0$ με την ανερχόμενη κατακόρυφη γραμμή. Όταν ο δίσκος αφεθεί, αρχίζει να κυλάει. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητά του ως συνάρτηση της γωνίας $\vartheta$. Να αποδειχθεί ότι για $\vartheta = \pi/2$ η επιτάχυνση του G είναι 18g/49 και να βρεθεί η αντίδραση του οριζόντιου επιπέδου τη στιγμή εκείνη.

Λύση




Για να βρούμε τη γωνιακή ταχύτητα $\dot{\vartheta}$ του δίσκου θα χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα της ενέργειας. Η συνθήκη κύλισης του δίσκου είναι $\dot{x}_G = \alpha\dot{\vartheta}$ και η ροπή αδράνειάς του ως προς G είναι $I_G = m\alpha^2/2$. Άρα η κινητική ενέργεια του δίσκου, που οφείλεται στη μεταφορική κίνηση $\dot{x}_G$ και στη περιστροφική κίνηση $\dot{\vartheta}$ γύρω από το G, είναι

$$T_1 = \frac{1}{2}\, m\dot{x}_G^2 + \frac{1}{2}\, I_G\dot{\vartheta}^2 = \frac{3}{4}\, m\alpha^2\dot{\vartheta}^2$$

Οι συντεταγμένες του Σ είναι $x = x_G + \alpha\text{ημ}\vartheta$, $z = \alpha + \alpha\text{συν}\vartheta$. Επομένως η κινητική ενέργεια του Σ είναι

$$T_2 = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\, m\alpha^2\dot{\vartheta}^2[(1 + \text{συν}\vartheta)^2 + \text{ημ}^2\vartheta]$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας (μετά την παράλειψη των σταθερών όρων) του συστήματος είναι

$$V = mg\alpha\,\text{συν}\vartheta$$

Άρα το ολοκλήρωμα της ενέργειας είναι

$$T_1 + T_2 + V = \text{σταθ.} \equiv E$$

ή

$$\alpha\dot{\vartheta}^2(7 + 4\text{συν}\vartheta + 4g\,\text{συν}\vartheta) = \text{σταθ.} \equiv h \tag{1}$$

Για να βρούμε την τιμή της σταθερής h εφαρμόζουμε στην (1) τις αρχικές συνθήκες $\vartheta = 60^0$, $\dot{\vartheta} = 0$ οπότε προκύπτει $h = 2g$. Άρα

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{2g}{\alpha}\,\frac{1 - 2\text{συν}\vartheta}{7 + 4\text{συν}\vartheta} \tag{2}$$

Η (2) δίνει τη γωνιακή ταχύτητα $\dot{\vartheta}$ ως συνάρτηση του $\vartheta$.

Η επιτάχυνση του G είναι $\ddot{x}_G = \alpha\ddot{\vartheta}$. Παραγωγίζοντας την (2) ως προς t βρίσκουμε

$$\ddot{\vartheta} = \alpha^{-1}(7 + \alpha\,\text{συν}\vartheta)^{-1}[2\alpha\dot{\vartheta}^2\text{ημ}\vartheta + 2g\,\text{ημ}\vartheta] \tag{3}$$

Βάζοντας $\vartheta = \pi/2$ στις (2) και (3) βρίσκουμε αντίστοιχα

$$\dot{\vartheta}^2 = 2g/7\alpha, \quad \ddot{\vartheta} = (7\alpha)^{-1}[2\alpha\dot{\vartheta}^2 + 2g] \tag{4}$$

Από τις (4) βρίσκουμε ότι

$$\ddot{x}_G = \alpha\ddot{\vartheta} = 18g/49$$

Η αντίδραση **R** του επιπέδου εφαρμόζεται στο σημείο επαφής A (βλέπε στο σχήμα) και αναλύεται σε μια οριζόντια συνιστώσα T και μια κατακόρυφη $R_n$, δηλ. $\mathbf{R} = T\mathbf{i} + R_n\mathbf{k}$. Για να βρούμε την **R** θα χρησιμοποιήσουμε τη Δ.Ε της κίνησης του κέντρου μάζας του συστήματος (δίσκος+υλ. σημείο). Το κέντρο μάζας K βρίσκεται στη μέση της GΣ (επειδή οι μάζες του δίσκου και του Σ είναι ίσες), δηλ. είναι $\overrightarrow{OK} \equiv \mathbf{r} = (x_G + \alpha\,\text{ημ}\vartheta/2)\mathbf{i} +$

$+ (\alpha/2)$συν$\vartheta$j. Η συνολική εξωτερική δύναμη που ενεργεί στο σύστημα είναι $\mathbf{F} = \mathbf{R} + 2mg\mathbf{k} = T\mathbf{i} + (R_n + 2mg)\mathbf{k}$. Άρα η Δ.Ε της κίνησης του Κ είναι

$$2m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \tag{5}$$

Παίρνοντας υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις και προβάλλοντας την (5) κατά τις διευθύνσεις i και j βρίσκουμε

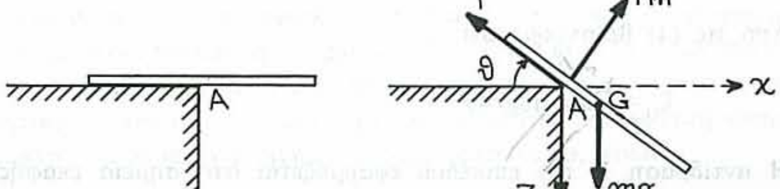
$$\left.\begin{aligned} T &= 2m \frac{d^2}{dt^2}\left(x_G + \frac{\alpha}{2}\,\text{ημ}\vartheta\right) \\ R_n &= 2m \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\alpha}{2}\,\text{συν}\vartheta\right) + 2mg \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Για $\vartheta = \pi/2$ είναι $\dot{\vartheta}^2 = 2g/7\alpha$, $\ddot{x}_G = 18g/4g$, οπότε οι (6) δίνουν

$$T = 22mg/49, \qquad R_n = 80mg/49$$

**6)** Ένα ομογενές στερεό ραβδί κρατιέται ακίνητο πάνω σε οριζόντιο τραπέζι έτσι ώστε τα δύο τρίτα του μήκους να εξέχουν πέρα από την άκρη του τραπεζιού ενώ το υπόλοιπο μέρος του ακουμπά στο τραπέζι. Μόλις αφεθεί ελεύθερο, το ραβδί αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από την άκρη του τραπεζιού. Να αποδειχθεί ότι αφού περιστραφεί κατά γωνία $\vartheta =$ τοξεφ(f/2) όπου f είναι ο συντελεστής τριβής, θα αρχίσει ύστερα να γλυστράει.

Λύση




Η αντίδραση που ασκεί η άκρη Α του τραπεζιού στο ραβδί αναλύεται σε μια συνιστώσα Τ κατά μήκος του ραβδιού και σε μια $R_n$ κάθετη σ' αυτό. Η δύναμη Τ είναι η στατική τριβή που ακινητοποιεί το σημείο του ραβδιού που ακουμπά στην άκρη Α. Όσο είναι $T < fR_n$ το ραβδί περιστρέφεται γύρω από το Α ενώ μόλις γίνει $T = fR_n$ το ραβδί αρχίζει να γλυστράει. Έστω ότι το μήκος του ραβδιού είναι 3α. Η ροπή αδράνειας του ως προς Α είναι $I_A = m\alpha^2$. Επομένως, η Δ.Ε της περιστροφικής κίνησης είναι

$$I_A\ddot{\vartheta} = mg(\alpha/2)\sigma\upsilon\nu\vartheta = m\alpha^2\ddot{\vartheta} \tag{1}$$

Ολοκληρώνοντας την (1) και παίρνοντας υπόψη ότι για $\vartheta = 0$ είναι $\dot{\vartheta} = 0$ βρίσκουμε

$$\dot{\vartheta}^2 = (g/\alpha)\eta\mu\vartheta \tag{2}$$

Αν x, y είναι οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας G του ραβδιού, οι Δ.Ε της κίνησης του G είναι

$$m\ddot{x} = R_n\eta\mu\vartheta - T\sigma\upsilon\nu\vartheta \tag{3}$$

$$m\ddot{z} = mg - R_n\sigma\upsilon\nu\vartheta - T\eta\mu\vartheta \tag{4}$$

Βάζοντας $T = fR_n$ στις (3) και (4) και απαλοίφοντας την $R_n$ βρίσκουμε

$$\frac{\eta\mu\vartheta - f\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\sigma\upsilon\nu\vartheta + f\eta\mu\vartheta} = \frac{\ddot{x}}{g - \ddot{z}} \tag{5}$$

Όμως είναι $x = (\alpha/2)\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $z = (\alpha/2)\eta\mu\vartheta$. Αν πάρουμε υπόψη και την (2), η (5) γίνεται τελικά

$$\frac{\eta\mu\vartheta - f\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\sigma\upsilon\nu\vartheta + f\eta\mu\vartheta} = -\frac{\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{1 + \eta\mu\vartheta} \tag{6}$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $\psi = \varepsilon\varphi\vartheta$, η (6) γίνεται

$$(2\psi - f)(1 + \psi^2) = 0$$

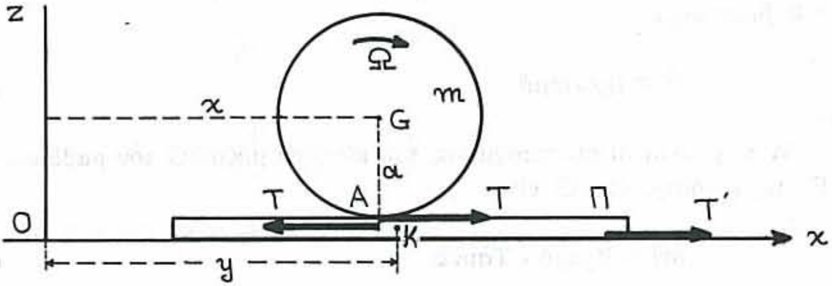
Άρα

$$\psi = \varepsilon\varphi\vartheta = f/2$$

7) Μια ομογενής σφαίρα με μάζα m και ακτίνα α περιστρέφεται γύρω από μια οριζόντια διάμετρο με γωνιακή ταχύτητα ω. Η σφαίρα τοποθετείται μαλακά πάνω σε μια ομογενή στερεή πλάκα Π η οποία έχει μάζα m και

ακουμπά πάνω σε οριζόντιο τραπέζι. Ο συντελεστής τριβής σφαίρας-πλάκας είναι μ και πλάκας-τραπεζιού είναι μ/4. Να αποδειχτεί ότι αν η πλάκα κρατιέται ακίνητη, η σφαίρα θα κινηθεί μέχρι την απόσταση $2\alpha^2\omega^2/49\mu g$ πριν σταματήσει να γλυστράει. Αν η πλάκα είναι ελεύθερη να γλυστράει πάνω στο τραπέζι, να αποδειχτεί ότι η απόσταση που θα διανύσει η σφαίρα πάνω στην πλάκα πριν σταματήσει να γλυστράει πάνω της είναι $3\alpha^2\omega^2/64\mu g$.

Λύση




Μόλις η σφαίρα ακουμπήσει στην πλάκα, η τριβή Τ που αρχίζει να ενεργεί στη σφαίρα είναι αντίθετη προς την ταχύτητα αω που έχει τη στιγμή εκείνη το σημείο Α της σφαίρας που ακουμπάει στην πλάκα. Γι' αυτό η σφαίρα αρχίζει να γλυστράει και να κυλάει προς τη διεύθυνση της Τ. Στο σχήμα φαίνεται μια τυχαία θέση του συστήματος, όπου Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή εκείνη και x, y είναι αντίστοιχα οι αποστάσεις που διάνυσαν τα κέντρα μάζας G της σφαίρας και Κ της πλάκας από τη στιγμή που η σφαίρα ακούμπησε στην πλάκα.

**α) Περίπτωση ακίνητης πλάκας.** Το γλύστρημα θα σταματήσει τη στιγμή εκείνη $t_1$ που η ταχύτητα του σημείου επαφής Α της σφαίρας μηδενιστεί δηλ. $\upsilon_A = \dot{x} - \alpha\Omega = 0$. Πρέπει λοιπόν να βρούμε τα $\dot{x}$ και Ω. Για το σκοπό αυτό γράφουμε τις Δ.Ε της κίνησης της σφαίρας.

$$m\ddot{x} = T = \mu R_n = \mu mg \qquad \text{(μεταφορική κίνηση)} \tag{1}$$

$$\frac{2}{5}\, m\alpha^2\dot{\Omega} = -\alpha T = -\alpha\mu mg \qquad \text{(περιστροφική κίνηση)} \tag{2}$$

όπου $R_n$ είναι η κατακόρυφη συνιστώσα της αντίδρασης της πλάκας. Ολοκληρώνοντας τις (1), (2) και παίρνοντας υπόψη ότι για $t=0$ είναι $x = \dot{x} = 0$, $\Omega = \omega$, βρίσκουμε

$$\dot{x} = \mu gt, \quad x = \mu gt^2/2, \quad \Omega = \omega - 5\mu gt/2\alpha \tag{3}$$

Επομένως η συνθήκη $\upsilon_A = 0$ γίνεται

$$7\mu g t_1/2 - \alpha\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 2\alpha\omega/7\mu g$$

οπότε από τις (3) προκύπτει ότι

$$x_1 = 2\alpha^2\omega^2/49\mu g$$

**β) Περίπτωση κινητής πλάκας.** Η πλάκα θα κινηθεί προς τα αριστερά με την επίδραση της τριβής από τη σφαίρα, οπότε θα αρχίσει να ενεργεί και η τριβή $T' = (\mu/4)2mg$ που οφείλεται στην επαφή της με το έδαφος. Το γλύστρημα θα σταματήσει όταν μηδενιστεί η σχετική ταχύτητα ανάμεσα στο σημείο Α της σφαίρας και στην πλάκα, δηλ. $\upsilon_A - \dot{y} = 0$ ή $\dot{x} - \alpha\Omega - \dot{y} = 0$. Πρέπει λοιπόν να βρούμε τα $\dot{x}$, $\Omega$, $\dot{y}$. Επειδή οι Δ.Ε (1), (2) ισχύουν πάλι, τα $\dot{x}$, $\Omega$ δίνονται από τις (3). Για να βρούμε το $\dot{y}$ ολοκληρώνουμε τη Δ.Ε της κίνησης της πλάκας

$$m\ddot{y} = T' - T = -\mu mg/2$$

και παίρνοντας υπόψη ότι για $t = 0$ είναι $y = \dot{y} = 0$ βρίσκουμε

$$\dot{y} = -\mu g t/2, \quad y = -\mu g t^2/2 \tag{4}$$

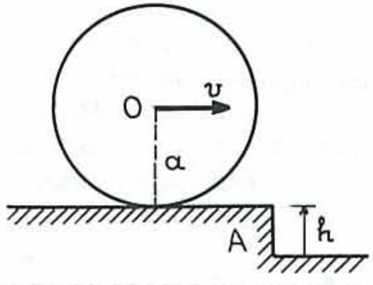
Αντικαθιστώντας τις (3), (4) στη συνθήκη $\dot{x} - \alpha\Omega - \dot{y} = 0$ βρίσκουμε ότι το γλύστρημα θα σταματήσει τη στιγμή $t_2 = \alpha\omega/4\mu g$, οπότε θα είναι $x_{(t_2)} = \alpha^2\omega^2/32\mu g$ και $y_{(t_2)} = -\alpha^2\omega^2/64\mu g$. Το διάστημα που θα έχει διανύσει λοιπόν η σφαίρα πάνω στην πλάκα είναι

$$x_{(t_2)} - y_{(t_2)} = 3\alpha^2\omega^2/64\mu g.$$

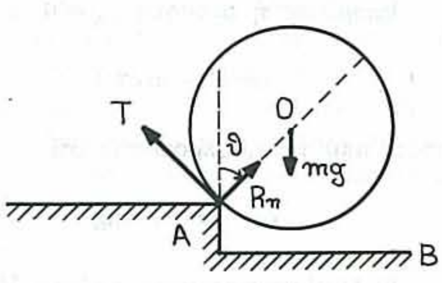
**8)** Ένα κυκλικό στεφάνι με ακτίνα α κυλάει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το στεφάνι διατηρεί το επίπεδό του κατακόρυφο και διευθύνεται με ταχύτητα υ προς ένα σκαλοπάτι όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1. Για ποιες τιμές της ταχύτητας υ το στεφάνι κυλάει κάτω στο σκαλοπάτι χωρίς να χάσει την επαφή του με αυτό;

Λύση

Η αντίδραση **R** που ασκεί η άκρη Α του σκαλοπατιού πάνω στο στεφάνι αναλύεται σε μια συνιστώσα $R_n$ κατά τη διεύθυνση της ΑΟ και σε μια συνιστώσα Τ (στατική τριβή) κατά τη διεύθυνση της εφαπτόμενης στο




*Σχήμα 1*




*Σχήμα 2*

Α. Για να μη χαθεί η επαφή του στεφανιού με την άκρη Α, πρέπει να είναι $R_n > 0$ μέχρι τη στιγμή που το στεφάνι θα ακουμπήσει πάλι στο οριζόντιο επίπεδο Β, δηλ. μέχρι που να γίνει $\alpha συν\vartheta = \alpha - h$ ή $συν\vartheta = 1 - h/\alpha$ (βλέπε στο σχήμα 2). Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε την $R_n$.

Το Ο κάνει κυκλική κίνηση γύρω από το Α. Η κεντρομόλα δύναμη $m\alpha\dot{\vartheta}^2$ οφείλεται στην $R_n$ και στην ακτινική συνιστώσα του βάρους, δηλ.

$$m\alpha\dot{\vartheta}^2 = mgσυν\vartheta - R_n \quad \Rightarrow \quad R_n = mgσυν\vartheta - m\alpha\dot{\vartheta}^2 \qquad (1)$$

Για να βρούμε το $\dot{\vartheta}^2$ της (1), χρησιμοποιούμε το ολοκλήρωμα της ενέργειας

$$\frac{1}{2}\, I_A\dot{\vartheta}^2 + mg\alpha συν\vartheta = m\alpha^2\dot{\vartheta}^2 + mg\alpha συν\vartheta = σταθ. \equiv E \qquad (2)$$

όπου $I_A = 2m\alpha^2$ είναι η ροπή αδράνειας του στεφανιού ως προς το Α και η στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας είναι το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το Α. Επειδή αρχικά, δηλ. πριν αρχίσει η περιστροφή γύρω από το Α, είναι $\vartheta = 0$, $\alpha\dot{\vartheta} = \upsilon$, η (2) δίνει $E = m\upsilon^2 + mg\alpha$. Αντικαθιστώντας το Ε στην (2), λύνοντας ως προς $\dot{\vartheta}^2$ και αντικαθιστώντας το $\dot{\vartheta}^2$ στην (1) βρίσκουμε

$$R_n = m(2gσυν\vartheta - \upsilon^2/\alpha - g)$$

Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται η $\vartheta$, η $R_n$ ελαττώνεται. Για να μπορέσει η $\vartheta$ να πάρει την τιμή $συν\vartheta^* = 1 - h/\alpha$ (οπότε το στεφάνι θα έχει ακουμπήσει στο οριζόντιο επίπεδο Β χωρίς να εγκαταλείψει το Α) πρέπει να είναι

$$R_n(\vartheta^*) > 0 \quad ή \quad 2gσυν\vartheta^* - \upsilon^2/\alpha - g > 0$$

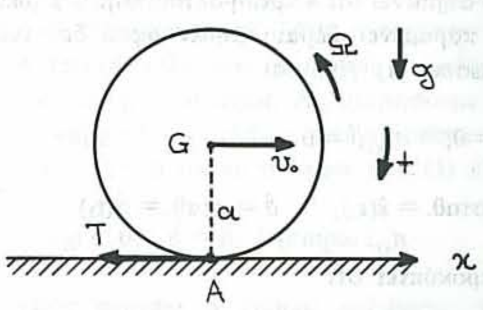
ή

$$\upsilon^2 < g(\alpha - 2h) \qquad (3)$$

Είναι φανερό ότι για $\alpha < 2h$ ο περιορισμός (3) ποτέ δεν ικανοποιείται, δηλ. ανεξάρτητα από την ταχύτητα του στεφανιού, όταν το ύψος του σκαλοπατιού είναι αρκετά μεγάλο ($h > \alpha/2$), το στεφάνι θα εγκαταλείψει το Α πριν ακουμπήσει στο επίπεδο Β.

9) Η σφαίρα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα έχει αρχικά ταχύτητα $\upsilon_0$ προς τα εμπρός και γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = -\Omega$. Να μελετηθεί η κίνησή της.

Λύση




Αρχικά, η ταχύτητα του σημείου Α της σφαίρας που ακουμπά στο έδαφος είναι ίση με $\upsilon_A = \upsilon_0 + \Omega\alpha$ και διευθύνεται προς τα εμπρός. Άρα η σφαίρα αρχικά θα γλυστρήσει στο έδαφος (επειδή $\upsilon_A \neq 0$) και γιαυτό θα παρουσιαστεί τριβή ολίσθησης $T = nmg$ που διευθύνεται προς τα πίσω (αντίθετα προς την $\upsilon_A$). Οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του κέντρου μάζας G κατά την οριζόντια διεύθυνση και της περιστροφικής κίνησης γύρω από το G είναι

$$m\ddot{x} = -T, \quad I_G\ddot{\vartheta} = \alpha T \qquad (T = nmg) \tag{1}$$

Όπου η τετμημένη x του G και η γωνία στροφής $\vartheta$ έχουν μηδενική τιμή για $t = 0$.

Ολοκληρώνοντας τις (1) βρίσκουμε

$$\dot{x} = \upsilon_0 - ngt, \quad I_G\dot{\vartheta} = -I_G\Omega + \mu mg\alpha t \tag{2}$$

(επειδή για $t = 0$ είναι $\dot{x} = \upsilon_0$ και $\dot{\vartheta} = -\Omega$).

Η ταχύτητα του σημείου επαφής Α της σφαίρας είναι

$$\upsilon_A = \dot{x} - \alpha\dot{\vartheta} = \upsilon_0 + \alpha\Omega - ng(1 + m\alpha^2/I_G)t \tag{3}$$

Παρατηρούμε από τις (2) και (3) ότι οι ταχύτητες $\dot{x}$ του G και $\upsilon_A$ του A ελαττώνονται συνεχώς καθώς αυξάνει ο χρόνος t. Για να μηδενιστεί η $\dot{x}$ χρειάζεται χρόνος $t_1 = \upsilon_0/ng$ ενώ για να μηδενιστεί η $\upsilon_A$ χρειάζεται χρόνος $t_2 = (\upsilon_0 + \alpha\Omega)/ng(1 + m\alpha^2/I_G)$.

Υπάρχουν λοιπόν δύο περιπτώσεις:

α) $t_1 > t_2$, δηλ. $\alpha\Omega < m\alpha^2\upsilon_0/I_G$. Τότε μηδενίζεται πρώτα η $\upsilon_A$, δηλαδή το σημείο A σταματάει στιγμιαία πριν να σταματήσει η σφαίρα ($\dot{x} > 0$). Επομένως, τη στιγμή $t_2$ παύει η σφαίρα να γλυστράει (αφού $\upsilon_A = 0$) και η κίνησή της είναι καθαρή κύλιση (πριν από την $t_2$ ήταν $\upsilon_A \neq 0$ και $\dot{x} > 0$ δηλ. η σφαίρα προχωρούσε προς τα εμπρός γλυστρώντας και κυλώντας ταυτόχρονα). Αυτό σημαίνει ότι η τριβή ολίσθησης T μηδενίζεται ξαφνικά τη στιγμή $t_2$ και παραμένει βέβαια μηδέν αφού δε γίνεται ολίσθηση. Επομένως οι εξισώσεις (1) γίνονται

$$m\ddot{x} = 0, \qquad I_G\ddot{\vartheta} = 0$$

Άρα

$$\dot{x} = \text{σταθ.} = \dot{x}(t_2), \qquad \dot{\vartheta} = \text{σταθ.} = \dot{\vartheta}(t_2)$$

Από τις (2) προκύπτει ότι

$$\dot{x}_{(t_2)} = \frac{(m\alpha^2\upsilon_0/I_G) - \alpha\Omega}{1 + \dfrac{m\alpha^2}{I_G}} > 0,$$

$$\dot{\vartheta}_{(t_2)} = \frac{m(\upsilon_0 + \alpha\Omega)}{I_G + m\alpha^2} > 0$$

Επομένως η σφαίρα συνεχίζει να κυλάει προς τα εμπρός με σταθερή ταχύτητα. Παρατηρούμε ότι η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\vartheta}$ της σφαίρας ενώ αρχικά ήταν αρνητική $\dot{\vartheta}_0 = -\Omega$ τη στιγμή $t_2$ που αρχίζει η καθαρή κύλιση είναι θετική $\dot{\vartheta}_{(t_2)} > 0$. Αυτό σημαίνει ότι σε κάποια ενδιάμεση στιγμή $t_3$ η $\dot{\vartheta}$ μηδενίζεται. Από την (2) προκύπτει ότι $\dot{\vartheta} = 0$ για $t = t_3 = \Omega I_G/nmg\alpha$.

Ώστε στην περίπτωση αυτή, η σφαίρα ξεκινάει γλυστρώντας προς τα εμπρός ($\dot{x} > 0$) και γυρίζοντας προς τα πίσω ($\dot{\vartheta} < 0$), σε κάποια στιγμή ($t_3$) αρχίζει να γυρίζει προς τα εμπρός ($\dot{\vartheta} > 0$) καθώς γλυστράει προς τα εμπρός και, τέλος, μετά από κάποια στιγμή $t_2$ σταματάει να γλυστράει και κυλάει συνεχώς προς τα εμπρός.

β) $t_1 < t_2$, δηλ. $\alpha\Omega > m\alpha^2\upsilon_0/I_G$. Τότε μηδενίζεται πρώτα η $\dot{x}$, δηλαδή η σφαίρα σταματάει στιγμιαία τη στιγμή $t_1$ ενώ το σημείο A έχει ταχύτητα

(σύμφωνα με την 3)

$$\upsilon_A(t_1) = \alpha\Omega - m\alpha^2\upsilon_0/I_G > 0$$

και η σφαίρα έχει γωνιακή ταχύτητα (σύμφωνα με την 2)

$$\dot{\vartheta}(t_1) = \alpha^{-1}(m\alpha^2\upsilon_0/I_G - \alpha\Omega) < 0$$

Επειδή το Α εξακολουθεί να γλυστράει προς τα εμπρός, η τριβή ολίσθησης Τ εξακολουθεί να ενεργεί προς τα πίσω και γι' αυτό εξακολουθούν να ισχύουν οι εξισώσεις (1). Σύμφωνα με τις (1) η επιτάχυνση $\ddot{x}$ του G είναι αρνητική. Άρα η ταχύτητα $\dot{x}$ του G μετά το μηδενισμό της τη στιγμή $t_1$ θα γίνει αρνητική, δηλαδή η σφαίρα αρχίζει (για $t > t_1$) να κινείται προς τα πίσω. Αν μετρήσουμε το χρόνο από τη στιγμή $t_1$, τότε οι «αρχικές» συνθήκες των εξισώσεων (1) είναι: $t = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{\vartheta}_0 = m\alpha\upsilon_0/I_G - \Omega < 0$ οπότε η λύση των (1) είναι

$$\dot{x} = -ngt < 0, \quad \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 + (nmg\alpha/I_G)t \tag{4}$$

Επομένως καθώς περνάει ο χρόνος αυξάνεται το μέτρο $|\dot{x}|$ της ταχύτητας της σφαίρας και ελαττώνεται το μέτρο της γωνιακής της ταχύτητας, δηλαδή η σφαίρα γλυστράει γρηγορότερα προς τα πίσω και περιστρέφεται βραδύτερα προς τα πίσω ($\dot{\vartheta} < 0$). Το σημείο επαφής Α έχει ταχύτητα

$$\upsilon_A = \dot{x} - \alpha\dot{\vartheta} = (\alpha\Omega - m\alpha^2\upsilon_0/I_G) - ng(1 + m\alpha^2/I_G)t \tag{5}$$

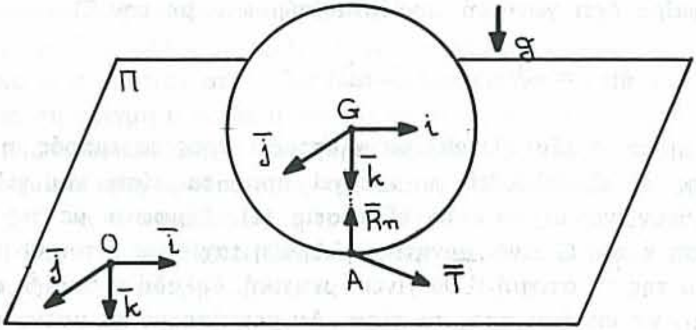
η οποία ελαττώνεται με το χρόνο και μηδενίζεται τη στιγμή

$$t_4 = \frac{\alpha\Omega - m\alpha^2\upsilon_0/I_G}{ng(1 + m\alpha^2/I_G)}$$

Επομένως τη στιγμή $t_4$ σταματάει η σφαίρα να γλυστράει (αφού $\upsilon_A = 0$) και αρχίζει να κυλάει προς τα πίσω με σταθερή ταχύτητα.

**10)** Μια ομογενής σφαίρα με μάζα m και ακτίνα α μπορεί να κυλάει χωρίς να γλυστράει πάνω σε ακίνητο οριζόντιο επίπεδο. Η συνολική δύναμη **F** που ενεργεί στη σφαίρα περνάει από το κέντρο μάζας της G. Να αποδειχθεί ότι η μεταφορική κίνησή της είναι ίδια με την κίνηση υλικού σημείου που έχει ίδια μάζα m, κινείται χωρίς τριβή και με την επίδραση της δύναμης 5F/7.

Λύση




Οι διευθύνσεις των αξόνων με αρχή το G είναι ίδιες με τις διευθύνσεις **i**, **j**, **k** των αδρανειακών αξόνων που έχουν ως αρχή το σημείο O του επιπέδου Π. Ας υποθέσουμε ότι η **F** είναι ίση με $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + mg\mathbf{k}$. Η αντίδραση **R** που ενεργεί στο σημείο επαφής A της σφαίρας με το Π γράφεται με τη μορφή $\mathbf{R} = \mathbf{R}_n + \mathbf{T} = -R_n\mathbf{k} + T_x\mathbf{i} + T_y\mathbf{j}$, όπου **T** είναι η τριβή.

Η Δ.Ε της κίνησης του G είναι

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \qquad (\mathbf{r} = \overrightarrow{OG}) \tag{1}$$

Παίρνοντας υπόψη τις προηγούμενες σχέσεις καθώς και τη σχέση

$$\overrightarrow{OG} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k}$$

βρίσκουμε από την (1) ότι

$$m\ddot{x} = F_x + T_x, \quad m\ddot{y} = F_y + T_y, \quad m\ddot{z} = 0 = mg - R_n \tag{2}$$

Για να υπολογίσουμε τις $T_x$, $T_y$ θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο μεταβολής της στροφορμής, δηλαδή

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \tag{3}$$

όπου $\mathbf{L} = (2/5)m\alpha^2\boldsymbol{\omega}$ είναι η στροφορμή (ως προς το G) της σφαίρας, $\boldsymbol{\omega} =$ $= \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα της και $\mathbf{M} = \overrightarrow{GA} \times (\mathbf{F} + \mathbf{R}) =$

$= \alpha k \times (T_x i + T_y j) = -\alpha T_y i + \alpha T_x j$ είναι η ροπή (ως προς το G) των εξωτερικών δυνάμεων. Με τη βοήθεια των σχέσεων αυτών η (3) δίνει

$$\dot{\omega}_1 = \frac{5}{2m\alpha} T_y, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{5}{2m\alpha} T_x, \quad \omega_3 = \text{σταθ.} \tag{4}$$

Επειδή η σφαίρα κυλάει χωρίς να γλυστράει πρέπει η απόλυτη (ως προς O) ταχύτητα του σημείου της A να είναι μηδενική, δηλαδή

$$\upsilon_A = \upsilon_G + \omega \times \overrightarrow{GA} = (\dot{x} i + \dot{y} j) + (\omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k) \times \alpha k =$$

$$= (\dot{x} + \alpha\omega_2) i + (\dot{y} - \alpha\omega_1) j = 0$$

Άρα

$$\dot{x} + \alpha\omega_2 = 0, \quad \dot{y} - \alpha\omega_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \alpha\dot{\omega}_2 = 0, \quad \ddot{y} - \alpha\dot{\omega}_1 = 0 \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας τα $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$ από τις (5) στις (4) βρίσκουμε

$$T_x = -(2/5) m\ddot{x}, \quad T_y = -(2/5) m\ddot{y}$$

οπότε οι (2) γίνονται

$$m\ddot{x} = (5/7) F_x, \quad m\ddot{y} = (5/7) F_y$$

**11)** Μια ομογενής σφαίρα με μάζα m και ακτίνα α κυλάει χωρίς να γλυστράει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω γύρω από κατακόρυφο άξονα. Στη σφαίρα ενεργεί μόνο το βάρος της. Να βρεθεί η κίνηση του κέντρου μάζας G της σφαίρας.

Λύση

Στη σφαίρα ενεργεί το βάρος της **B** και η αντίδραση **R** του επιπέδου Π στο σημείο επαφής A. Αν η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας είναι ω, οι νόμοι της κίνησης του κέντρου μάζας και της μεταβολής της στροφορμής (ως προς το G) της σφαίρας, δίνουν

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{R} + \mathbf{B} = \mathbf{R} - mg\mathbf{k} \qquad (\mathbf{r} = \overrightarrow{OG}) \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{L}} = (2/5)m\alpha^2\dot{\boldsymbol{\omega}} = \overrightarrow{GA} \times \mathbf{R} = -\alpha\mathbf{k} \times \mathbf{R} \tag{2}$$

Επειδή η σφαίρα κυλάει χωρίς να γλυστράει, η απόλυτη ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}_A$ του σημείου A της σφαίρας πρέπει να είναι ίση με την απόλυτη ταχύτητα $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ του σημείου A του επιπέδου. Αλλά είναι $\boldsymbol{\upsilon}_A = \boldsymbol{\upsilon}_G + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{GA} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (-\alpha\mathbf{k}) = \dot{\mathbf{r}} - \alpha\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}$. Άρα

$$\dot{\mathbf{r}} - \alpha\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = \Omega\mathbf{k} \times \mathbf{r} \tag{3}$$

Παραγωγίζοντας την (3) ως προς t βρίσκουμε

$$\ddot{\mathbf{r}} - \alpha\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{k} = \Omega\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} \tag{4}$$

Απαλοίφοντας την **R** από τις (1), (2) βρίσκουμε

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -(5/2\alpha)\mathbf{k} \times \ddot{\mathbf{r}} \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (4) βρίσκουμε

$$\ddot{\mathbf{r}} = (2\Omega/7)\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} = (2\Omega/7)\,\frac{d}{dt}\,(\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \tag{6}$$

Ολοκληρώνοντας την (6) βρίσκουμε

$$\dot{\mathbf{r}} = (2\Omega/7)\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \tag{7}$$

όπου $\mathbf{r}_0$ είναι σταθερό διάνυσμα που βρίσκεται από τις αρχικές συνθήκες. Αν γράψουμε την (7) με τη μορφή

$$\boldsymbol{\upsilon}_G = \boldsymbol{\Omega}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

συμπεραίνουμε ότι το G διαγράφει περιφέρεια κύκλου με κέντρο το σημείο $\mathbf{r}_0$, ακτίνα ίση με $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ και σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\Omega'$ ίση με $2\Omega/7$.

**12)** Ένα στερεό είναι ελεύθερο να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας του G. Οι κύριες ροπές αδράνειας ως προς G είναι $I_1 = 7$, $I_2 = 25$, $I_3 = 32$ μονάδες. Αρχικά το στερεό έχει γωνιακή ταχύτητα $\Omega$ γύρω από άξονα που περνάει από το G και έχει τέτοιο προσανατολισμό ως προς τους κυρίους άξονες $Gx_1x_2x_3$ ώστε να είναι $\omega_{10} = 4\Omega/5$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 3\Omega/5$. Να βρεθούν οι συνιστώσες $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ της γωνιακής ταχύτητας $\omega$ ως προς τους άξονες $Gx_1x_2x_3$ σε τυχαία χρονική στιγμή και να αποδειχθεί ότι για $t \to \infty$ το στερεό περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $x_2$.

Λύση

Οι εξισώσεις του Euler

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0$$

$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = 0$$

$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = 0$$

για $I_1 = 7$, $I_2 = 25$, $I_3 = 32$ γίνονται

$$\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3 = 0 \tag{1}$$

$$\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1 = 0 \tag{2}$$

$$16\dot{\omega}_3 + 9\omega_1\omega_2 = 0 \tag{3}$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$\omega_{10} = 4\Omega/5, \quad \omega_{20} = 0, \quad \omega_{30} = 3\Omega/5 \tag{4}$$

Πολ/ζοντας την (1) επί $\omega_1$, την (2) επί $\omega_2$, προσθέτοντας κατά μέλη, ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας τις (4) βρίσκουμε

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 16\Omega^2/25 \tag{5}$$

Πολ/ζοντας την (2) επί $9\omega_2$, την (3) επί $\omega_3$, προσθέτοντας κατά μέλη, ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας τις (4) βρίσκουμε

$$9\omega_2^2 + 16\omega_3^2 = 144\Omega^2/25 \tag{6}$$

Από τις (2), (4), (5) βρίσκουμε

$$dt = \frac{d\omega_2}{\omega_3\omega_1} = \frac{4}{3}\,\frac{d\omega_2}{\left(\frac{3}{5}\Omega\right)^2 - \omega_2^2} \tag{7}$$

Ολοκληρώνοντας την (7) βρίσκουμε

$$\omega_2 = \left(\frac{4\Omega}{5}\right)\mathrm{th}\left(\frac{3\Omega}{5}\,t\right) = \frac{4\Omega}{5}\,\eta\mu\varphi \tag{8}$$

όπου $\varepsilon\varphi(\varphi/2) = \mathrm{th}(3\Omega t/10)$.

Αντικαθιστώντας την (8) στις (5), (6) βρίσκουμε

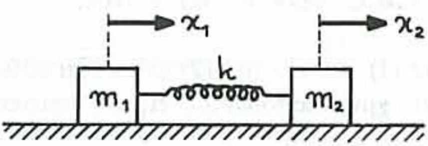
$$\omega_1 = \frac{4\Omega}{5}\,\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad \omega_3 = \frac{3\Omega}{5}\,\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Παρατηρούμε ότι για $t \to \infty$ είναι $\mathrm{th}(3\Omega t/10) \to 1$, άρα $\varphi/2 \to \pi/4$ ή $\varphi \to \pi/2$ και $\omega_1 \to 0$, $\omega_2 \to 4\Omega/5$, $\omega_3 \to 0$.

## γ) Μικρές ταλαντώσεις

**1)** Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες και η κίνηση του συστήματος που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Λύση




Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, οι Δ.Ε των μικρών ταλαντώσεων μπορούν να γραφούν με τη μορφή $M\ddot{x} + Bx = 0$, όπου $x$ είναι ο πίνακας-στήλη $(x_1, x_2 \ldots x_n)^T$, $M = (m_{ij})$ είναι ο συμμετρικός πίνακας που έχει για στοιχεία τους συντελεστές της τετραγωνικής μορφής της δυναμικής ενέργειας και $B = (b_{ij})$ είναι ο συμμετρικός πίνακας που έχει για στοιχεία τους συντελεστές της τετραγωνικής μορφής της κινητικής ενέργειας. Οι ιδιοσυχνότητες $\omega_i$ του συστήματος είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$|B - \omega^2 M| = 0 \tag{1}$$

Το σύστημα αυτό μελετήθηκε στην άσκηση (23) όπου βρέθηκε ότι η κινητική ενέργεια T, η δυναμική ενέργεια V και οι Δ.Ε της κίνησης είναι

$$2T = m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2, \quad 2V = kx_1^2 + kx_2^2 - 2kx_1x_2 \tag{2}$$

$$m_1\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) = 0 \tag{3}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \tag{4}$$

Με τη βοήθεια πινάκων, οι Δ.Ε (3) και (4) γράφονται ως

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Από την εξίσωση (5) ή ακόμα και από τις εξισώσεις (2) προκύπτει ότι οι πίνακες M και B είναι

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

Επομένως η εξίσωση (1) των ιδιοσυχνοτήτων γίνεται

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2 m_1 & -k \\ -k & k - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = \omega^2[m_1m_2\omega^2 - (m_1 + m_2)k] = 0$$

Άρα, οι δυο ιδιοσυχνότητες $\omega_1$ και $\omega_2$ καθορίζονται από τις σχέσεις

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1m_2}\,k$$

Ο μηδενισμός της μιας ιδιοσυχνότητας σημαίνει ότι το σύστημα μπορεί όχι μόνο να ταλαντώνεται (με συχνότητα $\omega_2$) αλλά και να μετατοπίζεται στο χώρο σαν να ήταν στερεό σώμα. Αυτό θα φανεί καλύτερα αν λύσουμε τις Δ.Ε της κίνησης. Για το σκοπό αυτό κάνουμε τα παρακάτω τεχνάσματα. Προσθέτουμε κατά μέλη τις (3) και (4). Προκύπτει ότι

$$d^2(m_1x_1 + m_2x_2)/dt^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1x_1 + m_2x_2 = A + Bt \tag{6}$$

Διαιρούμε την (3) με $m_1$, την (4) με $m_2$ και αφαιρούμε κατά μέλη. Προκύπτει ότι

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1) + \omega_2^2(x_2 - x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_1 = \Gamma\sigma\upsilon\nu(\omega_2 t + \varphi) \quad (7)$$

Λύνοντας τις (6) και (7) ως προς $x_1$ και $x_2$ βρίσκουμε

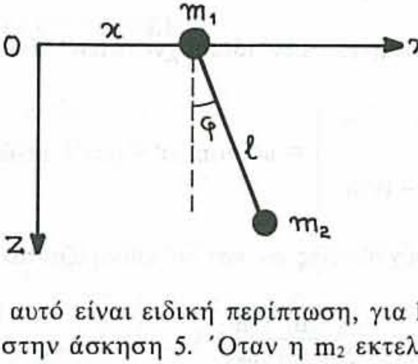
$$x_1 = (m_1 + m_2)^{-1}[A + Bt - m_2\Gamma\sigma\upsilon\nu(\omega_2 t + \varphi)]$$

$$x_2 = (m_1 + m_2)^{-1}[A + Bt + m_1\Gamma\sigma\upsilon\nu(\omega_2 t + \varphi)]$$

όπου οι σταθερές Α, Β, Γ, φ βρίσκονται από τις αρχικές συνθήκες. Παρατηρούμε ότι εκτός από την ταλάντωση με συχνότητα $\omega_2$ υπάρχει και ο όρος $A + Bt$ που αντιστοιχεί σε μία στερεή μετακίνηση του συστήματος ως σύνολο.

2) Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες και η κίνηση του συστήματος που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Λύση




Το σύστημα αυτό είναι ειδική περίπτωση, για $k = 0$, του συστήματος που μελετήθηκε στην άσκηση 5. Όταν η $m_2$ εκτελεί μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας $x = x_0$, $\varphi = 0$, οι ποσότητες $\varphi$ και $\dot{\varphi}$ είναι αρκετά μικρές. Γιαυτό, στις Δ.Ε της άσκησης 5 μπορούμε να κάνουμε τις αντικαταστάσεις $\eta\mu\varphi \simeq \varphi$, $\sigma\upsilon\nu\varphi \simeq 1$, $k = 0$ και να παραλείψουμε τον όρο που έχει το $\dot{\varphi}^2$. Προκύπτει

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi} = 0, \quad m_2 l\ddot{x} + m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 g l\varphi = 0 \qquad (1)$$

ή με μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l \\ m_2 l & m_2 l^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2 g l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως η εξίσωση των ιδιοσυχνοτήτων είναι

$$\begin{vmatrix} -(m_1 + m_2)\omega^2 & -m_2 l\omega^2 \\ -m_2 l\omega^2 & m_2 g l - m_2 l^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

Οι ρίζες της (2) είναι

$$\omega_1 = 0 \qquad \omega_2 = \sqrt{(m_1 + m_2)g/l}$$

Αυτές είναι οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Ο μηδενισμός της $\omega_1$ αντιστοιχεί στη δυνατότητα να κινηθεί το σύστημα ως στερεό σώμα.

Για να βρούμε την κίνηση πρέπει να ολοκληρώσουμε τις Δ.Ε (1). Η πρώτη εξίσωση (1) ολοκληρώνεται αμέσως. Προκύπτει

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l\varphi = c_1 t + c_2 \tag{3}$$

Απαλοίφοντας το $\ddot{x}$ από τις (1) βρίσκουμε

$$\ddot{\varphi} + \omega_2^2\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = c_3\text{συν}(\omega_2 t + c_4) \tag{4}$$

Οι εξισώσεις (3) και (4) καθορίζουν την κίνηση. Οι σταθερές $c_1$ - $c_4$ βρίσκονται από τις αρχικές συνθήκες. Οι όροι με τα $c_1$ και $c_2$ αντιστοιχούν στη μηδενική ιδιοσυχνότητα $\omega_1$ και αντιπροσωπεύουν τη στερεή κίνηση του συστήματος.

3) Να μελετηθούν οι μικρές ταλαντώσεις των συζευγμένων εκκρεμών της άσκησης 36 όταν $m_1 = m_2$.

Λύση

Οι Δ.Ε της κίνησης που βρέθηκαν στην άσκηση 36 γράφονται με μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & -b \\ -b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

όπου

$$d=\frac{g}{l}+\frac{k\alpha^2}{ml^2},\quad b=\frac{k\alpha^2}{ml^2} \tag{1'}$$

Επομένως η εξίσωση των ιδιοσυχνοτήτων είναι

$$\begin{vmatrix} d-\omega^2 & -b \\ -b & d-\omega^2 \end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

Άρα

$$\omega^2_{1,2}=d\mp b \quad \text{ή} \quad \omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k\alpha^2}{ml^2}} \tag{3}$$

Ώστε, οι φυσικές ταλαντώσεις των εκκρεμών έχουν τη μορφή

$$\varphi_1=A\eta\mu(\omega_i t+\vartheta),\quad \varphi_2=B\eta\mu(\omega_i t+\vartheta) \tag{4}$$

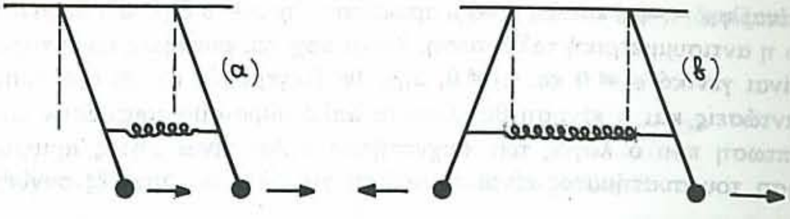
Για να βρούμε τα πλάτη A και B των φυσικών ταλαντώσεων, αντικαθιστούμε τις (4) στις (1). Προκύπτει

$$\begin{aligned}(d-\omega_i^2)A-bB&=0\\ -bA+(d-\omega_i^2)B&=0\end{aligned} \tag{5}$$

Αυτό το ομογενές αλγεβρικό σύστημα έχει λύση, επειδή ισχύει η (2), που είναι η ακόλουθη

$$\frac{A}{B}=\frac{b}{d-\omega^2_i} \tag{6}$$

Παρατηρούμε ότι ο λόγος των πλατών A και B εξαρτιέται μόνο από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος (ποσότητες b, d, $\omega_i$) και όχι από τις αρχικές συνθήκες. Παρατηρούμε επίσης ότι το σύστημα (5) καθορίζει μόνο το λόγο A/B των πλατών και όχι τις τιμές του καθενός ξεχωριστά. Για $\omega_i=\omega_1$ η (6) δίνει $A/B=+1$ οπότε $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$, ενώ για $\omega_i=\omega_2$ δίνει $A/B=-1$ οπότε $\varphi_1(t)=-\varphi_2(t)$. Επομένως όταν το σύστημα εκτελεί τη φυσική ταλάντωση που έχει τη μικρότερη συχνότητα ($\omega_1$) τα δύο εκκρεμή ταλαντώνονται με την ίδια φάση δηλ. παραμένουν πάντα παράλληλα μεταξύ τους (βλέπε στο σχήμα 1α) ενώ όταν εκτελεί τη φυσική ταλάντωση




συμμετρική ταλάντωση $\omega_1$ αντισυμμετρική ταλάντωση $\omega_2$

*Σχήμα 1*

με τη μεγαλύτερη συχνότητα ($\omega_2$) τα εκκρεμή έχουν διαφορά φάσης $180^0$, δηλ. κινούνται αντίθετα (βλέπε στο σχήμα 1β).

Μια τυχαία ταλάντωση (με τυχαίες αρχικές συνθήκες) είναι συνισταμένη των δυο παραπάνω φυσικών ταλαντώσεων, δηλ. είναι

$$\varphi_1 = c_1\eta\mu(\omega_1 t + \vartheta_1) + c_2\eta\mu(\omega_2 t + \vartheta_2)$$
$$\varphi_2 = c_3\eta\mu(\omega_1 t + \vartheta_1) + c_4\eta\mu(\omega_2 t + \vartheta_2) \qquad (7)$$

όπου, σύμφωνα με τα προηγούμενα, είναι $c_1/c_3 = 1$ και $c_2/c_4 = -1$.

Οι υπόλοιπες σταθερές, π.χ. οι $c_1$, $c_2$, $\vartheta_1$, $\vartheta_2$ βρίσκονται από τις αρχικές συνθήκες. Για το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε τις (7)

$$\dot\varphi_1 = \omega_1 c_1\sigma\upsilon\nu(\omega_1 t + \vartheta_1) + \omega_2 c_2\sigma\upsilon\nu(\omega_2 t + \vartheta_2)$$
$$\dot\varphi_2 = \omega_1 c_1\sigma\upsilon\nu(\omega_1 t + \vartheta_1) - \omega_2 c_2\sigma\upsilon\nu(\omega_2 t + \vartheta_2) \qquad (8)$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες

$$t = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_{10}, \quad \varphi_2 = \varphi_{20}, \quad \dot\varphi_1 = \dot\varphi_{10}, \quad \dot\varphi_2 = \dot\varphi_{20}$$

στις (7) και (8) βρίσκουμε

$$\varphi_{10} = c_1\eta\mu\vartheta_1 + c_2\eta\mu\vartheta_2, \quad \varphi_{20} = c_1\eta\mu\vartheta_1 - c_2\eta\mu\vartheta_2$$
$$\dot\varphi_{10} = \omega_1 c_1\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 + \omega_2 c_2\sigma\upsilon\nu\vartheta_2, \quad \dot\varphi_{20} = \omega_1 c_1\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 - \omega_2 c_2\sigma\upsilon\nu\vartheta_2 \qquad (9)$$

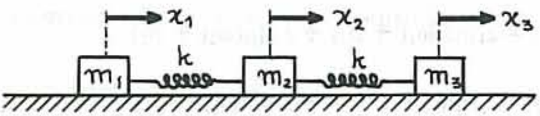
Από τις σχέσεις αυτές καθορίζονται οι σταθερές $c_1$, $c_2$, $\vartheta_1$, $\vartheta_2$.

Αν οι αρχικές συνθήκες είναι $\varphi_{10} = \varphi_{20}$ και $\dot\varphi_{10} = \dot\varphi_{20}$, προκύπτει από τις (9) ότι $c_2 = 0$, δηλ. ότι διεγείρεται μόνο η συμμετρική ταλάντωση $\omega_1$.

Αν είναι $\varphi_{10} = -\varphi_{20}$ και $\dot{\varphi}_{10} = -\dot{\varphi}_{20}$ προκύπτει ότι $c_1 = 0$ δηλ. ότι διεγείρεται μόνο η αντισυμμετρική ταλάντωση. Αν οι αρχικές συνθήκες είναι τυχαίες, θα είναι γενικά $c_1 \neq 0$ καί $c_2 \neq 0$, δηλ. θα διεγερθούν και οι δύο φυσικές ταλαντώσεις και η κίνηση θα είναι το απλό άθροισμά τους. Στην ειδική περίπτωση που ο λόγος των συχνοτήτων $\omega_1/\omega_2$ είναι ρητός αριθμός η κίνηση του συστήματος είναι περιοδική για όλες τις αρχικές συνθήκες.

4) Οι μάζες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα αρχικά ηρεμούν. Οι μάζες $m_1$ και $m_2$ βρίσκονται στις θέσεις ισορροπίας τους ($x_1 = x_2 = 0$) ενώ η $m_3$ είναι μετατοπισμένη κατά $x_3 = 1$. Αν $k = 1$ και $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, να βρεθεί η κίνηση.

Λύση




Σύμφωνα με την άσκηση 23, οι Δ.Ε της κίνησης είναι (για $k_1 = k_2 = 1$ και $m_1 = m_2 = m_3 = 1$)

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 + x_1 - x_2 = 0 \\
&\ddot{x}_2 + 2x_2 - x_3 - x_1 = 0 \qquad (1) \\
&\ddot{x}_3 + x_3 - x_2 = 0
\end{aligned}
$$

Οι φυσικές ταλαντώσεις του συστήματος έχουν τη μορφή

$$x_1 = A\eta\mu(\omega t + \vartheta), \quad x_2 = B\eta\mu(\omega t + \vartheta), \quad x_3 = \Gamma\eta\mu(\omega t + \vartheta) \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) στις (1) βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
&(1 - \omega^2)A - B = 0 \\
&-A + (2 - \omega^2)B = 0 \qquad (3) \\
&-B + (1 - \omega^2)\Gamma = 0
\end{aligned}
$$

Για να έχει λύση το ομογενές αλγεβρικό σύστημα (3), με αγνώστους τα πλάτη Α, Β, Γ των φυσικών ταλαντώσεων, πρέπει να μηδενίζεται η ορίζουσα των συντελεστών του, δηλ.

$$\begin{vmatrix} (1-\omega^2) & -1 & 0 \\ -1 & (2-\omega^2) & -1 \\ 0 & -1 & (1-\omega^2) \end{vmatrix} = \omega^2(1-\omega^2)(\omega^2-3) = 0$$

Άρα οι φυσικές συχνότητες του συστήματος είναι

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = \sqrt{3} \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας τα $\omega_i$ στο σύστημα (3) και λύνοντας το ως προς τους λόγους των πλατών Β/Α, Γ/Α βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &\text{για } \omega = \omega_1 = 0 \quad B/A = 1, \quad \Gamma/A = 1 \\ &\text{για } \omega = \omega_2 = 1 \quad B/A = 0, \quad \Gamma/A = -1 \\ &\text{για } \omega = \omega_3 = \sqrt{3} \quad B/A = -2, \quad \Gamma/A = 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Η γενική κίνηση του συστήματος είναι επαλληλία των φυσικών ταλαντώσεων, δηλ.

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1\eta\mu(\omega_1 t + \vartheta_1) + A_2\eta\mu(\omega_2 t + \vartheta_2) + A_3\eta\mu(\omega_3 t + \vartheta_3) \\ x_2 &= B_1\eta\mu(\omega_1 t + \vartheta_1) + B_2\eta\mu(\omega_2 t + \vartheta_2) + B_3\eta\mu(\omega_3 t + \vartheta_3) \\ x_3 &= \Gamma_1\eta\mu(\omega_1 t + \vartheta_1) + \Gamma_2\eta\mu(\omega_2 t + \vartheta_2) + \Gamma_3\eta\mu(\omega_3 t + \vartheta_3) \end{aligned} \tag{6}$$

Επειδή οι λόγοι Β/Α και Γ/Α των πλατών των φυσικών ταλαντώσεων έχουν πάντοτε τις τιμές (5) ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες, θα είναι

$$\begin{aligned} &B_1/A_1 = 1, \quad B_2/A_2 = 0, \quad B_3/A_3 = -2 \\ &\Gamma_1/A_1 = 1, \quad \Gamma_2/A_2 = -1, \quad \Gamma_3/A_3 = 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Επομένως οι λύσεις (6) γίνονται

$$
\begin{aligned}
x_1 &= A_1 ημ(ω_1 t + \vartheta_1) + A_2 ημ(ω_2 t + \vartheta_2) + A_3 ημ(ω_3 t + \vartheta_3) \\
x_2 &= A_1 ημ(ω_1 t + \vartheta_1) - 2A_3 ημ(ω_3 t + \vartheta_3) \\
x_3 &= A_1 ημ(ω_1 t + \vartheta_1) - A_2 ημ(ω_2 t + \vartheta_2) + A_3 ημ(ω_3 t + \vartheta_3)
\end{aligned} \tag{8}
$$

όπου οι σταθερές $A_1$, $A_2$, $A_3$, $\vartheta_1$, $\vartheta_2$, $\vartheta_3$ θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες. Για το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε τις (8)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= ω_1 A_1 συν(ω_1 t + \vartheta_1) + ω_2 A_2 συν(ω_2 t + \vartheta_2) + ω_3 A_3 συν(ω_3 t + \vartheta_3) \\
\dot{x}_2 &= ω_1 A_1 συν(ω_1 t + \vartheta_1) - 2ω_3 A_3 συν(ω_3 t + \vartheta_3) \\
\dot{x}_3 &= ω_1 A_1 συν(ω_1 t + \vartheta_1) - ω_2 A_2 συν(ω_2 t + \vartheta_2) + ω_3 A_3 συν(ω_3 t + \vartheta_3)
\end{aligned} \tag{9}
$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες

$$t = 0, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$$

στις (8) και (9) βρίσκουμε

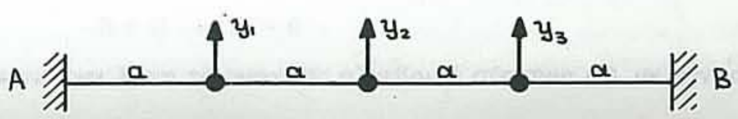
$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = π/2, \quad A_1 = 1/3, \quad A_2 = -1/2, \quad A_3 = 1/6.$$

Άρα οι (8) γίνονται

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3^{-1} - 2^{-1} συν t + 6^{-1} συν(\sqrt{3} t) \\
x_2 &= 3^{-1} - 3^{-1} συν(\sqrt{3} t) \\
x_3 &= 3^{-1} + 2^{-1} συν t + 6^{-1} συν(\sqrt{3} t)
\end{aligned}
$$

5) Να βρεθούν οι φυσικές ταλαντώσεις του συστήματος που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1.

Λύση



Σύμφωνα με την άσκηση 39, οι Δ.Ε της κίνησης είναι

$$m\ddot{y}_1 + 2by_1 - by_2 = 0$$

$$m\ddot{y}_2 + 2by_2 - by_3 - by_1 = 0 \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_3 + 2by_3 - by_2 = 0$$

όπου $b = F/\alpha$ και F είναι η σταθερή τάση της χορδής AB.

Οι φυσικές ταλαντώσεις έχουν εξισώσεις

$$y_1 = A\eta\mu(\omega t + \vartheta), \quad y_2 = B\eta\mu(\omega t + \vartheta), \quad y_3 = \Gamma\eta\mu(\omega t + \vartheta) \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) στις (1) βρίσκουμε ότι τα πλάτη Α, Β, Γ των φυσικών ταλαντώσεων πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$(2b - \omega^2 m)A - bB = 0$$

$$-bA + (2b - \omega^2 m)B - b\Gamma = 0 \qquad (3)$$

$$-bB + (2b - \omega^2 m)\Gamma = 0$$

Για να έχει λύση το ομογενές αλγεβρικό σύστημα (3) πρέπει να μηδενίζεται η ορίζουσα των συντελεστών του, δηλ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} (2b - \omega^2 m) & -b & 0 \\ -b & (2b - \omega^2 m) & -b \\ 0 & -b & (2b - \omega^2 m) \end{vmatrix} = 0$$

ή

$$\Delta = (m/b)^3\omega^6 - 6(m/b)^2\omega^4 + 10(m/b)\omega^2 - 4 = 0$$

Άρα οι φυσικές συχνότητες είναι

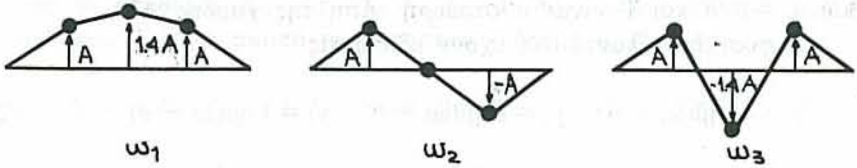
$$\omega_1 = \sqrt{0.6b/m}, \quad \omega_2 = \sqrt{2b/\mu}, \quad \omega_3 = \sqrt{3.4b/m} \qquad (4)$$

Λύνοντας το σύστημα (3) βρίσκουμε τους λόγους Β/Α και Γ/Α των πλατών των φυσικών ταλαντώσεων. Προκύπτει ότι για $\omega = \omega_1$ $B/A = 1.4$, $\Gamma/A = 1$

για $\omega = \omega_2$ $B/A = 0$, $\Gamma/A = -1$

για $\omega = \omega_3$ $B/A = -1.4$, $\Gamma/A = 1$

Τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα




6) Να βρεθούν οι φυσικές συχνότητες του συστήματος της άσκησης 26.

Λύση

Οι Δ.Ε της κίνησης που βρέθηκαν στην άσκηση 26 γράφονται με μορφή πινάκων $\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{Bq} = 0$, όπου $q = (x_1 \; x_2 \; y_1 \; y_2)^T$και

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5k & -k & 0 & 0 \\ -k & 5k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6k \end{pmatrix}$$

Οι φυσικές συχνότητες $\omega_i$ είναι λύσεις της εξίσωσης

$$|B - \omega^2 M| = 0$$

ή

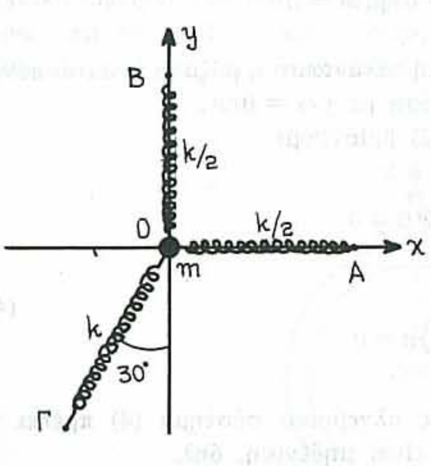
$$\begin{vmatrix} (5k - \omega^2 m) & -k & 0 & 0 \\ -k & (5k - \omega^2 m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (4k - \omega^2 m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (6k - \omega^2 m) \end{vmatrix} = 0$$

΄Αρα

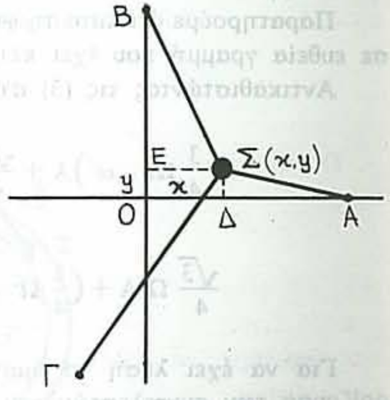
$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{4k/m}, \quad \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{6k/m}$$

7) Η μάζα m στο παρακάτω σχήμα 1 ισορροπεί στο σημείο Ο. Τα ελατήρια ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ έχουν το ίδιο φυσικό μήκος l και τα άκρα τους Α, Β, Γ είναι ακίνητα. Να βρεθούν οι φυσικές ταλαντώσεις της m.

Λύση




*Σχήμα 1*




*Σχήμα 2*

Οι Δ.Ε της κίνησης της m είναι

$$m\ddot{x} = -\partial V/\partial x, \quad m\ddot{y} = -\partial V/\partial x \tag{1}$$

Για να βρούμε τη δυναμική ενέργεια V των ελατηρίων πρέπει να βρούμε τη μεταβολή του μήκους τους όταν η μάζα βρεθεί σε μια τυχαία θέση Σ(x,y) στη γειτονιά του σημείου ισορροπίας Ο. Επειδή η μετατόπιση ΟΣ είναι μικρή (δηλ. $x/l \ll 1$, $y/l \ll 1$), η μεταβολή του μήκους του ελατηρίου ΟΑ είναι περίπου ίση με ΟΔ = x, η μεταβολή του μήκους του ελατηρίου ΟΑ είναι περίπου ίση με ΟΕ = y και η μεταβολή του μήκους του ελατηρίου ΟΓ είναι ίση με την προβολή του $\overrightarrow{O\Sigma} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ πάνω στην διεύθυνση $\mathbf{n} = \text{συν}60 \cdot \mathbf{i} + \text{ημ}60\mathbf{j}$ της $\overrightarrow{\Gamma O}$, δηλ. ίση με $\overrightarrow{O\Sigma} \cdot \mathbf{n} = x/2 + y\sqrt{3}/2$ (βλέπε στο σχήμα 2). ΄Αρα θα είναι

$$V = \frac{1}{2}\,\frac{k}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,\frac{k}{2}\,y^2 + \frac{1}{2}\,k\left(\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

οπότε οι (1) γίνονται

$$\ddot{x} + \frac{3}{4}\,\Omega^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}\,\Omega^2 y = 0, \quad \ddot{y} + \frac{\sqrt{3}}{4}\,\Omega^2 x + \frac{5}{4}\,\Omega^2 y = 0 \tag{2}$$

όπου $\Omega^2 = k/m$.

Οι φυσικές ταλαντώσεις έχουν εξίσωση

$$x = A\eta\mu(\omega t + \vartheta), \quad y = B\eta\mu(\omega t + \vartheta) \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι κατά τη φυσική ταλάντωση η μάζα m κινείται πάνω σε ευθεία γραμμή που έχει κλίση ίση με $y/x = B/A$.

Αντικαθιστώντας τις (3) στις (2) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3}{4}\,\Omega 2 - \omega^2\right)A + \frac{\sqrt{3}}{4}\,\Omega^2 B = 0 \\ &\frac{\sqrt{3}}{4}\,\Omega^2 A + \left(\frac{5}{4}\,\Omega^2 - \omega^2\right)B = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Για να έχει λύση το ομογενές αλγεβρικό σύστημα (4) πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών του να είναι μηδενική, δηλ.

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{3}{4}\,\Omega^2 - \omega^2\right) & \frac{\sqrt{3}}{4}\,\Omega^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}\,\Omega^2 & \left(\frac{5}{4}\,\Omega^2 - \omega^2\right) \end{vmatrix} = \omega^4 - 2\Omega^2\omega^2 + \frac{3}{4}\,\Omega^4 = 0$$

Άρα οι φυσικές συχνότητες της m είναι

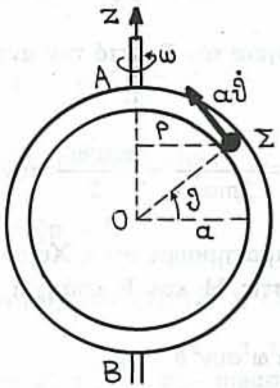
$$\omega_1 = \Omega/\sqrt{2}, \quad \omega_2 = \sqrt{3}\Omega/\sqrt{2}$$

Για $\omega = \omega_1$ οι (3) δίνουν $B/A = 1/\sqrt{3}$ ενώ για $\omega = \omega_2$ δίνουν $B/A = -1/\sqrt{3}$. Επομένως, η φυσική ταλάντωση $\omega_2$ γίνεται πάνω στην ευθεία ΟΓ ενώ η φυσική ταλάντωση $\omega_1$ γίνεται πάνω σε ευθεία που είναι κάθετη στην ΟΓ (στο σημείο Ο).

# 2. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΤΑ HAMILTON

**1)** Σωματίδιο Σ κινείται με την επίδραση του βάρους του μέσα σε λείο κυκλικό σωλήνα ο οποίος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τη σταθερή κατακόρυφη διάμετρό του ΑΒ. Να βρεθεί η Χαμιλτωνιανή του και οι κανονικές εξισώσεις.

Λύση




Το Σ περιστρέφεται μέσα στο σωλήνα με ταχύτητα $\alpha\dot{\vartheta}$ και ταυτόχρονα περιστρέφεται γύρω από την ΑΒ με ταχύτητα $\rho\omega = \alpha\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta$. Άρα η κινητική ενέργειά του είναι

$$T = \frac{1}{2}\, m\upsilon^2 = \frac{1}{2}\, m(\alpha^2\dot{\vartheta}^2 + \alpha^2\omega^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta) \qquad (1)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του Σ είναι*

$$V = mgz = mg\alpha\eta\mu\vartheta$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του Σ είναι

$$L = T - V = \frac{m\alpha^2}{2}\,(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta) - mg\alpha\eta\mu\vartheta$$

* Βλέπε επίσης στην άσκηση 8.

Η γενικευμένη ορμή p είναι $p_\vartheta = \partial L/\partial\dot{\vartheta} = m\alpha^2\dot{\vartheta}$, οπότε θα είναι $\dot{\vartheta} = p_\vartheta/m\alpha^2$. Άρα η Χαμλτωνιανή του Σ είναι

$$H = \dot{\vartheta}p_\vartheta - L = \frac{p_\vartheta^2}{2m\alpha^2} - \frac{m\alpha^2\omega^2}{2}\,\sigma\upsilon\nu^2\vartheta + mg\sigma\upsilon\nu\vartheta \qquad (2)$$

Οι κανονικές εξισώσεις είναι

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = p_\vartheta/m\alpha^2,$$

$$\dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -m\alpha^2\omega^2\sigma\upsilon\nu\vartheta\eta\mu\vartheta + mg\eta\mu\vartheta$$

**Παρατήρηση 1.** Η ενέργεια του Σ, μετά την αντικατάσταση $\dot{\vartheta} = p_\vartheta/m\alpha^2$, είναι

$$E = T + V = \frac{p_\vartheta^2}{2m\alpha^2} + \frac{m\alpha^2\omega^2}{2}\,\sigma\upsilon\nu^2\vartheta + mg\sigma\upsilon\nu\vartheta \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) παρατηρούμε ότι η Χαμιλτωνιανή δεν είναι ίση με την ενέργεια. Ανάμεσα στις Η και Ε υπάρχει η σχέση

$$H = E - m\alpha^2\omega^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta \qquad (4)$$

Η διαφορά των Η και Ε οφείλεται στο ότι η κινητική ενέργεια (1) δεν είναι ομογενής δευτεροβάθμια συνάρτηση της γεν. ταχύτητας $\dot{\vartheta}$ επειδή υπάρχει ο όρος $\alpha^2\omega^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta$.

**Παρατήρηση 2.** Επειδή η Η δεν εξαρτιέται άμεσα από το χρόνο t, δηλ. $\partial H/\partial t = 0$, είναι ολοκλήρωμα της κίνησης, δηλ. $dH/dt = 0$ ή $H = \sigma\tau\alpha\theta$. Για να δούμε αν και η Ε είναι ολοκλήρωμα της κίνησης, παραγωγίζουμε ως προς t την (4) και βρίσκουμε

$$dE/dt = -2m\alpha^2\omega^2\dot{\vartheta}\sigma\upsilon\nu\vartheta\eta\mu\vartheta \neq 0$$

Επομένως, η ενέργεια Ε δε διατηρείται σταθερή. Από φυσική άποψη, η αιτία που προκαλεί τη μεταβολή της ενέργειας είναι το έργο που παράγει η αντίδραση του σωλήνα πάνω στο σωματίδιο καθώς αυτό κινείται ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

2) Να βρεθεί η Χαμιλτωνιανή και οι κανονικές εξισώσεις για το ραβδι
που περιγράφεται στην άσκηση 3.

Λύση

Όπως γνωρίζουμε, η Λαγκρανζιανή του ραβδιού είναι

$$L = \frac{m\alpha^2}{2}\,\dot{\vartheta}^2 + \frac{ml^2}{2}\,\dot{\varphi}^2 + mg\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta \tag{1}$$

Άρα οι γενικευμένες ορμές είναι

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = m\alpha^2\dot{\vartheta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{ml^2}{3}\,\dot{\varphi}$$

και οι γενικευμένες ταχύτητες είναι

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{m\alpha^2}\,p_\vartheta, \quad \dot{\varphi} = \frac{3}{ml^2}\,p_\varphi \tag{2}$$

Η Χαμιλτωνιανή του ραβδιού είναι

$$H = \dot{\vartheta}p_\vartheta + \dot{\varphi}p_\varphi - L \tag{3}$$

Με τη χρησιμοποίηση των (1), (2) η (3) γίνεται

$$H = \frac{1}{2m\alpha^2}\,p_\vartheta^2 + \frac{3}{2ml^2}\,p_\varphi^2 - mg\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Οι κανονικές εξισώσεις είναι

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \frac{1}{m\alpha^2}\,p_\vartheta, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{3}{ml^2}\,p_\varphi$$

$$\dot{p}_\vartheta = \frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -mg\alpha\eta\mu\vartheta, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

3) Να βρεθεί η Χαμιλτωνιανή και οι κανονικές εξισώσεις για το ραβδ
που περιγράφεται στην άσκηση 30.

Λύση

Όπως είδαμε, η Λαγκρανζιανή του ραβδιού είναι

$$L = A(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \eta\mu^2\vartheta) - mgl\sigma\upsilon\nu\vartheta \tag{1}$$

όπου $A = 2ml^2/3$.

Άρα οι γενικευμένες ορμές είναι

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 2A\dot{\vartheta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 2A\dot{\varphi}\eta\mu^2\vartheta$$

Επομένως οι γενικευμένες ταχύτητες είναι

$$\dot{\vartheta} = p_\vartheta/2A, \quad \dot{\varphi} = p_\varphi/(2A\eta\mu^2\vartheta) \tag{2}$$

Η Χαμιλτωνιανή του ραβδιού είναι

$$H = \dot{\vartheta}p_\vartheta + \dot{\varphi}p_\varphi - L \tag{3}$$

Με τη χρησιμοποίηση των (1) και (2) η (3) γίνεται

$$H = \frac{1}{4A}\left[p_\vartheta^2 + \frac{p^2{}_\varphi}{\eta\mu^2\vartheta}\right] + mgl\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Οι κανονικές εξισώσεις είναι

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \frac{1}{2A}p_\vartheta, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{2A\eta\mu^2\vartheta}$$

$$\dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{1}{2A}\eta\mu^{-3}\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta p_\vartheta^2, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

**4)** Να βρεθεί η έκφραση της Χαμιλτωνιανής ενός υλικού σημείου Σ σε τυχαίο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Λύση

Σύμφωνα με την άσκηση 41, η Λαγκρανζιανή του Σ είναι

$$L = \frac{m}{2}\mathbf{u}^2 + \frac{m}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + m\mathbf{u}\cdot(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\gamma_0 \cdot \mathbf{r} - V \tag{1}$$

Η ορμή είναι

$$\mathbf{p} = \partial L/\partial \mathbf{u} = m\mathbf{u} + m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Άρα η ταχύτητα είναι

$$\mathbf{u} = m^{-1}[\mathbf{p} - m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \tag{2}$$

Η Χαμιλτωνιανή είναι

$$H = \mathbf{u}\mathbf{p} - L \tag{3}$$

Με τη χρησιμοποίηση των (1), (2) η (3) γίνεται

$$H = \frac{1}{2m}\,\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}\cdot(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + m\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\gamma}_0 + V$$

5) Έστω $l_1$, $l_2$, $l_3$ οι Καρτεσιανές συνιστώσες της στροφορμής $\mathbf{l}$ ενός υλικού σημείου. Να αποδειχτεί ότι δύο τυχαίες συνιστώσες $l_i$, $l_j$ της στροφορμής δεν μπορούν να θεωρηθούν ως κανονικές μεταβλητές ενώ μια τυχαία συνιστώσα $l_i$ μαζί με το τετράγωνο $l^2$ της στροφορμής μπορούν.

Λύση

Όπως γνωρίζουμε, είναι

$$l_1 = x_2p_3 - x_3p_2, \quad l_2 = x_3p_1 - x_1p_3, \quad l_3 = x_1p_2 - x_2p_1$$

όπου

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad p_1 = m\dot{x}, \quad p_2 = m\dot{y}, \quad p_3 = m\dot{z}$$

Εκτελώντας τις πράξεις που περιέχουν οι αγκύλες του Poisson βρίσκουμε

$$[l_1,\ l_2] = p_2x_1 - p_1x_2 = l_3$$

$$[l_2,\ l_3] = p_3x_2 - p_2x_3 = l_1$$

........................................

Τα αποτελέσματα αυτά μπορούμε να τα συνοψίσουμε στον τύπο

$$[l_i,\ l_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk}\, l_k \qquad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3) \tag{1}$$

όπου

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{αν το } (i,\ j,\ k) \text{ είναι άρτια μετάθεση των } (1,\ 2,\ 3) \\ -1 & \text{αν το } (i,\ j,\ k) \text{ είναι περιττή μετάθεση των } (1,\ 2,\ 3) \\ 0 & \text{στις υπόλοιπες περιπτώσεις} \end{cases}$$

Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, οι κανονικές μεταβλητές $q_i$, $p_i$ πρέπει να επαληθεύουν τις θεμελιώδεις αγκύλες του Poisson, δηλαδή

$$[q_i,\ q_k] = [p_i,\ p_k] = 0, \quad [q_i,\ p_k] = \delta_{ik} \tag{2}$$

Όμως οι σχέσεις (1) έρχονται σε αντίθεση με τις (2). Άρα οι $l_i$, $l_j$ δεν επαληθεύουν τις (2) και επομένως δεν μπορούν να θεωρηθούν ως κανονικές μεταβλητές.

Από τη σχέση

$$l^2 = \sum_i l_i^2$$

σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των αγκύλων του Poisson και με τις σχέσεις (1) βρίσκουμε ότι

$$[l_i,\ l^2] = \Big[l_i,\ \sum_j l_j^2\Big] = \sum_j [l_i,\ l_j^2] =$$

$$= \sum_j \{2l_j[l_i,\ l_j]\} = \sum_j \sum_k 2l_j\varepsilon_{ijk}l_k = 0$$

Επομένως τα $l^2$, $l_i$ μπορούν να θεωρηθούν ως κανονικές μεταβλητές.

6) Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Poisson να αποδειχτεί ότι αν οι δύο Καρτεσιανές συνιστώσες της στροφορμής είναι σταθερές τότε θα είναι σταθερή και η τρίτη.

**Λύση**

Έστω ότι οι Καρτεσιανές συνιστώσες της στροφορμής είναι $l_1$, $l_2$, $l_3$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Poisson, η αγκύλη Poisson δύο ολοκληρωμάτων της κίνησης είναι και αυτή ολοκλήρωμα της κίνησης. Στην προηγούμενη άσκηση αποδείξαμε ότι η αγκύλη Poisson δύο τυχαίων συνιστωσών $l_i$

και $l_j$ δίνει την τρίτη συνιστώσα της στροφορμής. Άρα αν οι $l_i$ και $l_j$ είνα ολοκληρώματα της κίνησης, τότε και η τρίτη συνιστώσα θα είναι και αυτη ολοκλήρωμα της κίνησης.