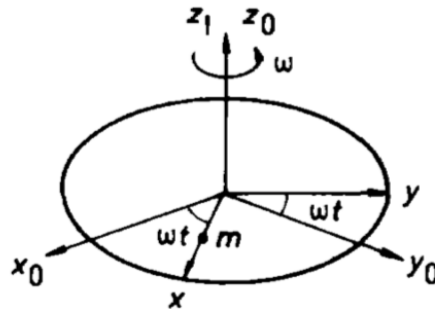


## Κλασική Μηχανική Εξέταση Σεπτέμβριος 2019

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:** Η διάρκεια της εξέτασης είναι **3 ώρες**. Τα θέματα θα τα παραδώσετε μαζί με το γραπτό σας. Όταν παραδώσετε το γραπτό σας πρέπει να δείξετε και την ταυτότητά σας.  
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

**Θέμα 1<sup>ο</sup> (2.5 μονάδες):** Σε μια παιδική χαρά ένας μύλος έχει πάνω του ζωγραφισμένους τους άξονες  $x$  και  $y$  ενώ οι άξονες  $x_0$  και  $y_0$  είναι ζωγραφισμένοι στο έδαφος. Ο μύλος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Ένα σκαθάρι μάζας  $m$  κινείται ακτινικά προς τα έξω κατά μήκος του άξονα  $x$  με σταθερή ταχύτητα  $v_0$ . Να γράψετε τη δύναμη που ασκεί ο μύλος στο σκαθάρι στο αδρανειακό σύστημα  $(x_0, y_0, z_0)$ . Το σκαθάρι βρίσκεται στην αρχή των αξόνων την χρονική στιγμή  $t=0$ . Δίνεται ο μετασχηματισμός στροφής:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$



**Θέμα 2<sup>ο</sup> (2.5 μονάδες):**

Υλικό σημείο μάζας  $m$  κινείται εντός πεδίου κεντρικής δύναμης που δίνεται από το δυναμικό  $V=kr$ .

**α)** Για ποια ενέργεια και ποια στροφορμή είναι η τροχιά του υλικού σημείου κυκλική με ακτίνα  $r$ ; (1)

**β)** Αν το υλικό σημείο διαταραχθεί ελαφρά από την κυκλική του τροχιά ποια θα είναι η συχνότητα των μικρών ακτινικών ταλαντώσεων  $\omega$ ; Εκφράστε τη συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας της κυκλικής τροχιάς  $\omega_0$ . (1.5)

**Θέμα 3<sup>ο</sup> (2.5 μονάδες):**

Γράψτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για το μαθηματικό εκκρεμές σώματος μάζας  $m$  και μήκους νήματος  $l(t)=l_0+at$ . Να βρείτε τα ολοκληρώματα της κίνησης.

**Θέμα 4<sup>ο</sup> (2.5 μονάδες):**

Το κέντρο μάζας ( $P$ ) ενός αγάλματος βρίσκεται σε απόσταση  $l$  από την βάση του (σημείο  $O$ ). Το άγαλμα αρχίζει να πέφτει όπως φαίνεται στο σχήμα. Υποθέστε ότι το έδαφος είναι αρκετά τραχύ ώστε να ασκεί την οριζόντια δύναμη ( $\vec{F}$ ) και την κατακόρυφη δύναμη ( $\vec{N}$ ) που απαιτούνται ώστε η κίνηση που φαίνεται στο σχήμα να είναι εφικτή. Η μάζα του αγάλματος είναι  $M$  και η ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας  $I_{CM}$ . Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $\vec{g}$ . Η βάση του αγάλματος ξεκολλάει από το έδαφος (η κάθετη δύναμη μηδενίζεται) όταν η γωνία γίνεται  $\theta_0$ . Βρείτε μια εξίσωση για τη γωνία  $\theta_0$  και δείξτε ότι αυτό συμβαίνει μόνον όταν  $I_{CM} < (1/3)Ml^2$ .

