

Κλασική Μηχανική Εξέταση Σεπτέμβριος 2018

ΟΔΗΓΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: Η διάρκεια της εξέτασης είναι **3 ώρες**. Τα θέματα θα τα παραδώσετε μαζί με το γραπτό σας. Όταν παραδώσετε το γραπτό σας πρέπει να δείξετε και την ταυτότητά σας.

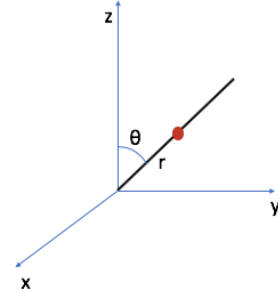
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1° (2 μονάδες):

Χάντρα είναι περιορισμένη να κινείται κατά μήκος ευθύγραμμου σύρματος το οποίο σχηματίζει γωνία θ με τον κατακόρυφο άξονα z και περιστρέφεται γύρω από αυτόν με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω όπως στο σχήμα.

α) Με γενικευμένη συντεταγμένη την απόσταση r από το κέντρο O κατά μήκος του σύρματος, γράψτε την Λανγκραντζιανή και την εξίσωση κίνησης της χάντρας. **(1)**

β) Βρείτε τα ολοκληρώματα της κίνησης και σχολιάστε τα. **(1)**



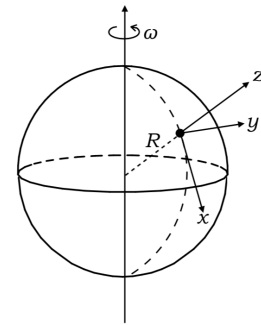
Θέμα 2° (2.5 μονάδες):

Υλικό σημείο μάζας m είναι περιορισμένο να κινείται στην επιφάνεια της Γης χωρίς τριβές. Το τοπικό σύστημα αναφοράς είναι όπως φαίνεται στο σχήμα με τον άξονα z στην κατακόρυφο του τόπου, τον άξονα x να δείχνει προς τον νότο και τον άξονα y προς την ανατολή. Η ακτίνα της Γης είναι R και η γωνιακή της ταχύτητα ω .

α) Αν η ταχύτητα του σώματος είναι $\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$ βρείτε την συνιστώσα της δύναμης Coriolis στο επίπεδο της Γης και γράψτε τις δυο συζευγμένες, μη-γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για την θέση του σώματος x, y . Αγνοείστε όλες τις άλλες δυνάμεις πλην της δύναμης Coriolis. **(1)**

β) Θεωρείστε τώρα ότι το τοπικό σύστημα αξόνων έχει την αρχή του πάνω στον Ισημερινό και το σώμα αρχικά βρίσκεται στην αρχή των αξόνων με ταχύτητα $\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{x} + v_{0y} \hat{y}$. Αν επιπλέον η απόσταση του σώματος από τον Ισημερινό (x) είναι πολύ μικρότερη από την ακτίνα της Γης και το σώμα διατηρεί σταθερή ταχύτητα στην διεύθυνση y , να γράψετε τις εξισώσεις της τροχιάς του σώματος $x=x(t)$ και $y=y(t)$. **(1)**

γ) Σχεδιάστε πρόχειρα την τροχιά που βρήκατε στο ερώτημα **β**. **(0.5)**



Θέμα 3° (3 μονάδες):

Υλικό σημείο μάζας m κινείται εντός ελκτικού κεντρικού δυναμικού $V(r) = -\frac{1}{\beta} \frac{k}{r^\beta}$ όπου k, β θετικές σταθερές. Υποθέστε ότι η στροφορμή του σώματος J είναι μη-μηδενική.

α) Γράψτε την Λανγκραντζιανή και δείξτε ότι η στροφορμή είναι σταθερή. **(1)**

β) Σχεδιάστε το υποθετικό δυναμικό συναρτήσει του r αν $\beta < 0$. **(1)**

γ) Βρείτε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. Είναι ευσταθής ή ασταθής; **(1)**

Θέμα 4° (2.5 μονάδες):

Πύραυλος αρχικής μάζας M_0 , με ταχύτητα εξάτμισης u και σταθερού ρυθμού μεταβολής μάζας μ ξεκινά από ακινησία και κινείται ελεύθερα (χωρίς την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων) στο διάστημα. Πόσο μακριά θα έχει φτάσει ο πύραυλος όταν έχει χάσει μισή από την αρχική του μάζα; ($\int \ln x dx = x \ln x - x$)