Ενότητα 10

Γενικευμένες συντεταγμένες. Εξισώσεις Lagrange.

9.1 Γενικευμένες συντεταγμένες. Βαθμοί ελευθερίας

Έστω, n, ο ελάχιστος αριθμός συντεταγμένων που απαιτείται για να καθορίσει ένα σύστημα. Συμβολίζουμε τις συντεταγμένες αυτές με $q_1, q_2, ..., q_n$, και τις ονομάζουμε γενικευμένες συντεταγμένες. Μία δεδομένη συντεταγμένη, q_k, μπορεί να είναι είτε γωνία, είτε απόσταση.

Ο αριθμός των συντεταγμένων που μπορούν να μεταβάλλονται ανεξάρτητα μεταξύ τους αποτελούν τους ***βαθμούς ελευθερίας*** του συστήματος. Αν όλες οι γενικευμένες συντεταγμένες ενός συστήματος μεταβάλλονται ανεξάρτητα μεταξύ τους, τότε το σύστημα ονομάζεται ***ολόνομο.***

Ας πάρουμε για παράδειγμα την κίνηση ενός σωματίου. Αν κινείται πάνω σε ένα επίπεδο, τότε, έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Έστω, q_1, q_2, οι γενικευμένες συντεταγμένες του. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σωματίου εκφράζονται ως εξής, συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων:

$$x = x(q_1, q_2)$$

$$y = y(q_1, q_2)$$

Αν το σωμάτιο έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας, τότε, αντίστοιχα θα έχουμε:

$$x = x(q_1, q_2, q_3)$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3)$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3)$$

Έστω ότι τα q μεταβάλλονται από τις αρχικές τιμές $(q_1, q_2, ...)$ και παίρνουν γειτονικές τιμές $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, ...)$.

Οι αντίστοιχες μεταβολές σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα είναι:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + ...$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + ...$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + ...$$

Οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, κλπ, είναι και αυτές συναρτήσεις των q.

Αν τώρα έχουμε ένα σύστημα πολλών σωματίων, με n βαθμούς ελευθερίας και γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, ..., q_n$, τότε, κατά την μεταβολή από την κατάσταση $(q_1, q_2, ..., q_n)$ στην κατάσταση $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, ..., q_n + \delta q_n)$, ένα αντιπροσωπευτικό σωμάτιο, *i*, κινείται από το σημείο (x_i, y_i, z_i) στο σημείο $(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$, όπου,

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\delta y_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k \qquad (9.1.1)$$

$$\delta z_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Και πάλι οι μερικές παράγωγοι είναι συναρτήσεις των q.

9.2 Γενικευμένες δυνάμεις

Όταν ένα σωμάτιο μετατοπίζεται κατά $\delta\vec{r}$ υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$, ξέρουμε ότι παράγεται έργο $\delta W = \vec{F}.\delta\vec{r} = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$, όπου $\vec{F} = (X, Y, Z)$ (ορθογώνιες συνιστώσες της $\vec{F}$). Αν εκφράσουμε τα $\delta x, \delta y, \delta z$ συναρτήσει των q_k βρίσκουμε ότι:

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n} \left(X \frac{\partial x}{\partial q_k} + Y \frac{\partial y}{\partial q_k} + Z \frac{\partial z}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^{n} Q_k \delta q_k \text{, όπου}$$

$$Q_k = X \frac{\partial x}{\partial q_k} + Y \frac{\partial y}{\partial q_k} + Z \frac{\partial z}{\partial q_k}$$

Η ποσότητα Q_k ονομάζεται ***γενικευμένη δύναμη*** συνδεδεμένη με την συντεταγμένη q_k. Αφού το γινόμενο $Q_k \delta q_k$ έχει διαστάσεις έργου, το Q_k θα έχει διαστάσεις δύναμης αν το q_k είναι απόσταση και ροπής αν το q_k είναι γωνία.

Για ένα σύστημα N σωματίων, το συνολικό έργο που παράγεται από όλες τις δυνάμεις $\vec{F}_i (i = 1, 2, ..., N)$ κατά την μετατόπιση του συστήματος είναι:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i$$

Αντικαθιστούμε τα $\delta x_i, ...,$ συναρτήσει των μεταβολών των γενικευμένων συντεταγμένων, οπότε:

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{N} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k = \sum_{k=1}^{n} Q_k \delta q_k$$

όπου, $Q_k = \sum_{i=1}^{N} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$ (9.2.1) είναι η γενικευμένη δύναμη για την συντεταγμένη q_k.

Συχνά δεν είναι πρακτικό (αλλά ούτε και αναγκαίο) να χρησιμοποιούμε αυτή την σχέση για να βρούμε την γενικευμένη δύναμη Q_k. Ευκολότερα την βρίσκουμε, χρησιμοποιώντας το ότι το $Q_k \delta q_k$ είναι το έργο που παράγεται από το σύστημα υπό την επίδραση της γενικευμένης δύναμης Q_k, όταν η συντεταγμένη q_k αλλάξει κατά δq_k (οι άλλες γενικευμένες συντεταγμένες παραμένουν σταθερές). Π.χ. αν το σύστημα είναι ένα στερεό σώμα, το έργο που παράγεται από τις εξωτερικές δυνάμεις όταν το σώμα στραφεί κατά γωνία $\delta\theta$ γύρω από δεδομένο άξονα είναι $L_\theta \delta\theta$, όπου,

L_θ είναι η συνολική ροπή όλων των δυνάμεων περί τον άξονα αυτό. Οπότε η L_θ είναι η γενικευμένη δύναμη που συνδέεται με την συντεταγμένη θ.

9.3 Γενικευμένες δυνάμεις για διατηρητικά πεδία δυνάμεων

Επανερχόμαστε για λίγο στην περίπτωση ενός σωματίου, το οποίο υποθέτουμε ότι βρίσκεται σε διατηρητικό πεδίο δυνάμεων, συνεπώς,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

όπου *V(x,y,z),* η δυναμική ενέργεια. Οπότε η γενικευμένη δύναμη Q_k μπορεί να εκφραστεί ως:

$$Q_k = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

Δηλαδή, $Q_k = -\dfrac{\partial V}{\partial q_k}$.

Π.χ. αν χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες, $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, τότε οι γενικευμένες δυνάμεις θα είναι $Q_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r}$, $Q_\theta = -\dfrac{\partial V}{\partial \theta}$.

Αν *V=V(r)* (κεντρική δύναμη), τότε, $Q_\theta = 0$.

Για διατηρητικό σύστημα Ν σωματίων μπορούμε να γράψουμε για την γενικευμένη δύναμη:

$$Q_k = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (9.3.1)$$

9.4 Οι εξισώσεις Lagrange για ένα σωμάτιο

Για να βρούμε τις γενικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων q_k, θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε από την εξίσωση $\vec{F} = m\vec{a}$. Είναι, όμως, απλούστερο να ακολουθήσουμε άλλη οδό: Βρίσκουμε την κινητική ενέργεια του συστήματος συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Αλλά, $x = x(q_1, q_2, ..., q_n) = x(q)$, δηλαδή, $\dot{x} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q}_k = \dot{x}\left(q, \dot{q}\right)$,

όμοια, για τα $\dot{y}$ και $\dot{z}$.

(Οι βαθμοί ελευθερίας *n* είναι 1,2, ή 3, εφόσον πρόκειται για ένα σωμάτιο).

Συνεπώς, η κινητική ενέργεια είναι συνάρτηση των $\dot{q}$:

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2\left(q,\dot{q}\right) + \dot{y}^2\left(q,\dot{q}\right) + \dot{z}^2\left(q,\dot{q}\right)\right].$$

Έτσι, $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m\left(\dot{x}\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}\dfrac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}\dfrac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_k}\right)$

Αλλά, $\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \dfrac{\partial x}{\partial q_k}$ (από την $\dot{x} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q}_k$)

Συνεπώς, $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m\left(\dot{x}\dfrac{\partial x}{\partial q_k} + \dot{y}\dfrac{\partial y}{\partial q_k} + \dot{z}\dfrac{\partial z}{\partial q_k}\right)$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο, t:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_k} + m\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + m\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_k} + m\dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_k} + m\dot{y}\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_k} + m\dot{z}\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_k} \qquad (9.4.1)$$

Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f(q_1, q_2, ..., q_n)$ έχουμε:

$$\frac{d}{dt}f(q_1, q_2, ..., q_n) = \frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\dot{q}_2 + ...$$

Οπότε, θέτοντας $f = \dfrac{\partial x}{\partial q_n}$, βρίσκουμε ότι:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_k}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q_k}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial^2 x}{\partial q_n \partial q_k}\dot{q}_n$$

Αλλά,

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial x}{\partial q_n}\dot{q}_n$$

Συνεπώς, $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial x}{\partial q_k} = \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial q_k}$. Όμοια, για τα *y, z*.

Αυτό σημαίνει ότι οι τελεστές $\dfrac{d}{dt}$ και $\dfrac{\partial}{\partial q_k}$ μπορούν να αντιμετατίθενται.

Έτσι, $m\dot{x}\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial q_k} = \dfrac{\partial\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2\right)}{\partial q_k}$. Οπότε, η (9.4.1) γράφεται (εφόσον, $m\ddot{x} = X$, κλπ) :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \underbrace{X\frac{\partial x}{\partial q_k} + Y\frac{\partial y}{\partial q_k} + Z\frac{\partial z}{\partial q_k}}_{Q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\Big[\underbrace{\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}_{\mathrm{T}}\Big]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \qquad (9.4.2)$$

Αυτές είναι οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης σε γενικευμένες συντεταγμένες, οι λεγόμενες εξισώσεις Lagrange, για ένα σωμάτιο.

Αν το πεδίο δυνάμεων είναι διατηρητικό, τότε, $Q_k = -\dfrac{\partial V}{\partial q_k}$, οπότε, οι εξισώσεις (9.4.2) γράφονται ως:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial (T-V)}{\partial q_k}$$

Εφόσον V=V(q) και $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$, έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{9.4.3}$$

όπου, ορίσαμε την συνάρτηση

$$L=T-V \tag{9.4.4}$$

που ονομάζεται συνάρτηση Lagrange του μηχανικού συστήματος.
Οι εξισώσεις (9.4.3) είναι οι εξισώσεις Lagrange για διατηρητικό πεδίο δυνάμεων.

9.5 Οι εξισώσεις Lagrange για γενικό σύστημα

Έστω x_i, οι καρτεσιανές συντεταγμένες του *i* σωματίου ($x \to x_1, y \to x_2, z \to x_3$).
(η αλλαγή συμβολισμού διευκολύνει στα επόμενα)

Τότε, $T = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)\right] = \sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2$. (9.5.1)

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες x_i είναι συναρτήσεις των γενικευμένων συντεταγμένων q_k.

Γενικά, $x_i = x_i(q_1, q_2, ..., q_n, t) = x_i(q, t)$

(ρητή εισαγωγή του χρόνου για να περιγράψει π.χ. ένα σώμα που κινείται πάνω σε επιφάνεια που και η ίδια κινείται με κάποιο τρόπο).

Οπότε,

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \tag{9.5.2}$$

όπου *i*=1,2,...,3*N*, με *N* τον αριθμό των σωματίων του συστήματος, και *k*=1,2,...,*n,* όπου *n* οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος.

Προφανώς, στην γενική περίπτωση, $T = T(q, \dot{q}, t)$.

Οπότε, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2\right) = \sum_{i=1}^{3N}\left(m_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right)$ (9.5.3)

Αλλά, από την (9.5.2) προκύπτει ότι $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$

Οπότε, από την (9.5.3), έχουμε ότι:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{3N} m_i\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

και παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{3N} m_i\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^{3N} m_i\dot{x}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \tag{9.5.4}$$

Αλλά, η γενικευμένη δύναμη, σύμφωνα με την (9.2.1), είναι:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3N} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

Επίσης,

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^{\,2}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

Οπότε, η εξίσωση (9.5.4) δίνει:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \qquad (9.5.5)$$

όπου k=1,2,..., n

Οι (9.5.5) αποτελούν τις εξισώσεις Lagrange του συστήματος των Ν σωματίων.

Αν το σύστημα είναι διατηρητικό, τότε, $Q_k = -\dfrac{\partial V}{\partial q_k}$. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε, όπως και για την περίπτωση του ενός σωματίου, την συνάρτηση Lagrange, $L=T-V$, οπότε η (9.5.5) γίνεται:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (9.5.6)$$

όπου k=1,2,..., n

Αν μέρος των γενικευμένων δυνάμεων δεν είναι διατηρητικό, μπορούμε να γράψουμε $Q_k = Q_k' - \dfrac{\partial V}{\partial q_k}$ και να ορίσουμε και πάλι την συνάρτηση Lagrange (για το διατηρητικό κομμάτι) $L=T-V$, οπότε, η (9.5.5) γίνεται:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = Q_k' + \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (9.5.7)$$

όπου k=1,2,..., n.

[Αυτή την μορφή χρησιμοποιούμε π.χ. όταν υπάρχουν δυνάμεις τριβής].