Ενότητα 9

Δυναμική στερεού σώματος

Στα προηγούμενα συζητήσαμε τις γενικές αρχές που καθορίζουν την κίνηση στερεού σώματος και την ειδική περίπτωση περιστροφής περί σταθερό άξονα.
Θα προχωρήσουμε στην εξέταση της γενικής κίνησης στερεού σώματος.

8.1 Επίδραση μικρής δύναμης στον άξονα περιστροφής

(Π.χ. ποδηλάτης γέρνει για να στρίψει)
Υποθέστε στερεό ελεύθερο να στρέφεται γύρω από ακίνητο σημείο χωρίς τριβές.
Έστω ότι αρχικά το σώμα περιστρέφεται γύρω από τον κύριο άξονα $\hat{e}_3$. Τότε, $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_3$ και $\vec{J} = I_3\vec{\omega}$

Αν στο σώμα δεν επιδρά καμιά εξωτερική δύναμη, τότε, $\dot{\vec{J}} = I_3\dot{\vec{\omega}} = 0 =$εξωτερική ροπή. Έστω τώρα ότι εφαρμόζουμε μια μικρή δύναμη $\vec{F}$ στη θέση $\vec{r}$ (όπου $\vec{F} \not\parallel \vec{r}$).

Τότε, $\dot{\vec{J}} = \vec{r} \times \vec{F}$, που σημαίνει ότι το σώμα θα αποκτήσει μια μικρή συνιστώσα γωνιακής ταχύτητας κάθετα στον άξονα $\hat{e}_3$). Για μικρή δύναμη, η συνιστώσα αυτή είναι μικρή σε σχέση με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από τον άξονα $\hat{e}_3$.
Αν παραλείψουμε αυτή την μικρή συνιστώσα, μπορούμε να γράψουμε $\dot{\vec{J}} = I_3\dot{\vec{\omega}} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Επειδή η ροπή $\vec{r} \times \vec{F}$ είναι κάθετη στην $\vec{\omega}$, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας θα είναι σταθερό ($\frac{d\omega^2}{dt} = 2\vec{\omega}.\dot{\vec{\omega}} = 2\vec{\omega}.\frac{1}{I_3}(\vec{r} \times \vec{F}) = 0 \Rightarrow |\vec{\omega}| = 0$), και αλλάζει μόνο η διεύθυνσή της.Επομένως,

$$\dot{\vec{J}} = I_3\dot{\vec{\omega}} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow I_3\omega\dot{\hat{e}}_3 = r\hat{e}_3 \times \vec{F} = -r\vec{F} \times \hat{e}_3 \Rightarrow \dot{\hat{e}}_3 = -\frac{r}{I_3}\frac{\vec{F}}{\omega} \times \hat{e}_3 \Rightarrow \dot{\hat{e}}_3 = \vec{\Omega} \times \hat{e}_3$$

Συνεπώς, το $\hat{e}_3$ (δηλ. ο άξονας περιστροφής περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega}$. Ο άξονας του σώματος μεταπίπτει γύρω από την διεύθυνση της $\vec{F}$.
Παρατηρείστε ότι η Ω είναι ανεξάρτητη της κλίσης του άξονα ως προς την κατακόρυφο. Όλα τα παραπάνω ισχύουν μόνο για $\Omega << \omega$. Η Ω είναι προφανώς αντιστρόφως ανάλογη προς την μάζα του σώματος και προς την γωνιακή ταχύτητα ω. Άρα όσο πιο βαρύ και πιο γρήγορα περιστρεφόμενο είναι ένα σώμα τόσο μικρότερες είναι οι συνέπειες της εξωτερικής δύναμης.

8.2 Κίνηση στερεού αναφερόμενη σε περιστρεφόμενους άξονες

Θέλουμε να περιγράψουμε την κίνηση στερεού ως προς σύστημα κυρίων αξόνων αδρανείας στερεωμένων πάνω στο σώμα και με αρχή την ίδια με εκείνη ενός σταθερού συστήματος συντεταγμένων.

Σύστημα *Oxyz* (περιστρεφόμενο): $\vec{J} = J_x\hat{i} + J_y\hat{j} + J_z\hat{k} = I_x\omega_x\hat{i} + I_y\omega_y\hat{j} + I_z\omega_z\hat{k}$, οπότε,
$\dot{\vec{J}} = \dot{J}_x\hat{i} + \dot{J}_y\hat{j} + \dot{J}_z\hat{k} = I_x\dot{\omega}_x\hat{i} + I_y\dot{\omega}_y\hat{j} + I_z\dot{\omega}_z\hat{k}$

Σύστημα $Ox_o y_o z_o$ (αδρανειακό):

$$\left[\frac{d\vec{J}}{dt}\right]_o = \dot{J}_x\hat{i} + \dot{J}_y\hat{j} + \dot{J}_z\hat{k} + J_x\dot{\hat{i}} + J_y\dot{\hat{j}} + J_z\dot{\hat{k}} \Rightarrow \left[\frac{d\vec{J}}{dt}\right]_o = \dot{\vec{J}} + \vec{\omega}\times\vec{J} = \vec{G}$$

(εφόσον $\vec{\omega}\times\vec{J} = J_x\dot{\hat{i}} + J_y\dot{\hat{j}} + J_z\dot{\hat{k}}$).

Για την ολική ροπή γράφουμε,

$$\left.\begin{aligned} G_x &= I_x\dot{\omega}_x + \left(I_z - I_y\right)\omega_y\omega_z \qquad (1)\\ G_y &= I_y\dot{\omega}_y + \left(I_x - I_z\right)\omega_z\omega_x \qquad (2)\\ G_z &= I_z\dot{\omega}_z + \left(I_y - I_x\right)\omega_x\omega_y \qquad (3)\end{aligned}\right\} \quad \textbf{Δυναμικές εξισώσεις Euler}$$

Οι εξισώσεις αυτές δεν είναι τίποτε άλλο παρά η $\dot{\vec{J}} = \vec{G}$ εκπεφρασμένη σε περιστρεφόμενους κύριους άξονες αδράνειας.