Ενότητα 8

Στερεά σώματα: Περιστροφή γύρω από άξονα.

7.1 Περιστροφή στερεού σώματος γύρω από σταθερό άξονα

Έστω στερεό σώμα που είναι ελεύθερο να περιστρέφεται μόνο γύρω από σταθερό άξονα, που θεωρούμε ότι ταυτίζεται με τον άξονα z. Επιλέγουμε το επίπεδο *xy* έτσι ώστε οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας (ΚΜ) να είναι $(x_{\mathrm{KM}}, y_{KM}, 0)$.

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, οι *(ρ,z)* είναι σταθερές, ενώ η συντεταγμένη φ μεταβάλλεται με ρυθμό $\dot{\varphi} = \omega$, που δεν είναι γενικά σταθερός.

7.1.1 Συνιστώσα της στροφορμής κατά μήκος του άξονα περιστροφής:

$$J_z = \sum_i m_i \rho_i (\rho_i \varphi_i) = \left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega \equiv I\omega \qquad (7.1.1)$$

όπου $I \equiv \sum_i m_i \rho_i^2$, $\omega = \dot{\varphi}_i$, $\forall i$. Το *I* είναι η *ροπή αδρανείας* γύρω από τον άξονα των *z*.

$$\dot{J}_z = I\dot{\omega} = \sum_i \rho_i F_\phi^i \text{ : Εξίσωση κίνησης} \qquad (7.1.2)$$

όπου F_ϕ^i, η φ συνιστώσα της δύναμης $\vec{F}^i$. (προκύπτει από την $\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, που ισχύει για κεντρικές εσωτερικές δυνάμεις). Η κινητική ενέργεια γράφεται και αυτή συναρτήσει του I:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\rho_i \dot{\varphi}_i)^2 = \sum_i m_i \rho_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2, \qquad (7.1.3)$$

και

$$\dot{T} = I\omega\dot{\omega} = \omega I \dot{\omega} = \omega \sum_i \rho_i F_\varphi^i = \omega \dot{J}_z$$

Από την εξίσωση της ορμής παίρνουμε την αντίδραση, $\vec{Q}$, του άξονα στο σώμα. Έχουμε

$$\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{Q} + \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow \vec{Q} = M\ddot{\vec{R}} - \sum_i \vec{F}_i,$$

όπου $\sum_i \vec{F}_i$ το άθροισμα των υπόλοιπων εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σώμα.

Αλλά, $\dot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times \vec{R}$ και $\ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{R} \right)$

Επομένως, $\vec{Q} = M\dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + M\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) - \sum_i \vec{F}_i$ (7.1.4)

Εφαρμογή: Σύνθετο εκκρεμές

Η εξίσωση κίνησης είναι:

$$\dot{J}_z = I\dot{\omega} = I\ddot{\varphi} = -R(Mg\sin\varphi)$$

ή $I\ddot{\varphi} \approx -MgR\varphi$, ή $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$, (7.1.5)

όπου $\omega = \sqrt{\dfrac{MgR}{I}}$.

Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας είναι:

$$T + V = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 - MgR\cos\varphi = E \tag{7.1.6}$$

όπου το E καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες.
Η αντίδραση $\vec{Q}$ του άξονα βρίσκεται με βάση την (7.1.4) ότι είναι:

$$Q_z = 0$$

$$Q_\rho = -Mg\cos\varphi - MR\dot{\varphi}^2$$

$$Q_\varphi = Mg\sin\varphi + MR\ddot{\varphi}$$

όπου τα $\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$, πρέπει να αντικατασταθούν από τις (7.1.5) και (7.1.6).

7.1.2 Κάθετες συνιστώσες της στροφορμής

Θα ασχοληθούμε τώρα με τις υπόλοιπες συνιστώσες της στροφορμής που είναι γενικά διάφορες του μηδενός (πάντα για την περίπτωση περιστροφής γύρω από σταθερό άξονα) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, έχουμε:

$$\vec{J} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{z}_i \end{vmatrix}$$

αλλά,

$$x_i = \rho_i \cos\varphi_i \Rightarrow \dot{x}_i = -\rho_i \omega \sin\varphi_i = -\omega y_i$$

$$y_i = \rho_i \sin\varphi_i \Rightarrow \dot{y}_i = \rho_i \omega \cos\varphi_i = \omega x_i$$

$$z_i = 0$$

Επομένως,

$$J_x = \sum_i m_i \left(-z_i \dot{y}_i\right) = -\sum_i m_i x_i z_i \omega \equiv I_{xz}\omega$$

$$J_y = \sum_i m_i \left(z_i \dot{x}_i\right) = -\sum_i m_i y_i z_i \omega \equiv I_{yz}\omega$$

$$J_z = \sum_i m_i \left(x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i\right) = -\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)\omega \equiv I_{zz}\omega$$

Δηλαδή, γενικά $\vec{J} \nparallel \vec{\omega}$. Οι ποσότητες I_{xz} και I_{yz} λέγονται ***γινόμενα αδρανείας***. Όταν αυτά είναι ίσα με μηδέν, τότε $\vec{J} \parallel \vec{\omega}$ και ο άξονας z λέγεται ***κύριος άξονας αδρανείας***.

7.2 Γενική κίνηση στερεού σώματος περί σταθερό άξονα – Κύριοι άξονες αδρανείας

Θεωρείστε στερεό που περιστρέφεται περί άξονα $\vec{\omega} = \left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right)$

$$\vec{J} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) = \sum_i m_i \left[r_i^2 \vec{\omega} - \left(\vec{r}_i . \vec{\omega}\right)\vec{r}_i\right], \text{ ή}$$

$$J_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

$$J_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$

$$J_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

ή, $\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{J} = \vec{I}.\vec{\omega}$ (7.2.1)

όπου

$$I_{xx} = \sum_i m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right),\ I_{yy} = \sum_i m_i \left(x_i^2 + z_i^2 \right),\ I_{zz} = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i,\ I_{xz} = I_{zx} = -\sum_i m_i x_i z_i,\ I_{yz} = I_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i \qquad (7.2.2)$$

Ο πίνακας $\vec{I}$ είναι ένας τανυστής και λέγεται τανυστής αδράνειας. Είναι συμμετρικός τανυστής (εφόσον $I_{xy} = I_{yx}$, κλπ).

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega}\times\vec{r}_i).(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{\omega}.\left[\vec{r}_i \times \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{I}.\vec{\omega} = \left(\omega_x,\quad \omega_y,\quad \omega_z\right) \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \qquad (7.2.3)$$

Αν οι άξονες x,y,z είναι άξονες συμμετρίας, τότε, ο $\vec{I}$ είναι διαγώνιος. Επειδή κάθε συμμετρικός πίνακας μπορεί να διαγωνιοποιηθεί, μπορούμε να βρούμε για κάθε στερεό τρεις άξονες αδρανείας, έστω $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, τέτοιους ώστε η στροφορμή του σώματος να είναι ευθυγραμμισμένη με τον άξονα περιστροφής.

Τότε, $\vec{\omega} = \omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 + \omega_3\hat{e}_3$ και

$\vec{J} = I_{11}\omega_1\hat{e}_1 + I_{22}\omega_2\hat{e}_2 + I_{33}\omega_3\hat{e}_3$

και η κινητική ενέργεια είναι:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2 =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega}.\vec{r}_i)^2\right] = \frac{1}{2}\vec{J}.\vec{\omega} = \frac{1}{2} I_{11}\omega_1^2 + \frac{1}{2} I_{22}\omega_2^2 + \frac{1}{2} I_{33}\omega_3^2$$

7.3 Μετατόπιση της αρχής των αξόνων (από το Κ.Μ. σε τυχούσα θέση)

Έστω ότι η αρχή των αξόνων δεν συμπίπτει με το κέντρο μάζας του στερεού σώματος όπως είχαμε υποθέσει αρχικά.

Έστω $\vec{R}$, το άνυσμα θέσης του Κ.Μ.

Τότε, $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^{\,*}$

και

$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i = -\sum_i m_i (X + x_i^*)(Y + y_i^*) =$$

$$= -\sum_i m_i XY - \cancel{\sum_i m_i X y_i^*} - \cancel{\sum_i m_i Y x_i^*} - \sum_i m_i x_i^* y_i^* =$$

$$= -MXY + I_{xy}^*$$

$$I_{xx} = -\sum_i m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right) = ... = M(Y^2 + Z^2) + I_{xx}^*,$$

κ.ο.κ.

(Θεώρημα παράλληλου άξονα)

7.4 Υπολογισμός ροπών αδρανείας
Για συνεχείς κατανομές ύλης, τα αθροίσματα των σχέσεων (7.2.2), πρέπει να αντικατασταθούν από ολοκληρώματα:

$$I_{xx} = \iiint \rho(\vec{r})\left(y^2 + z^2\right) d^3\vec{r}$$

$$I_{xy} = \iiint \rho(\vec{r})\left(-xy\right) d^3\vec{r} \text{ , κ.ο.κ.}$$

όπου $\rho(\vec{r})$ η πυκνότητα του σώματος.

7.5 Έκφραση της $\dot{\vec{J}}$ σε επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς
Έστω επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς $O'x'y'z'$. Το άνυσμα θέσης της στοιχιώδους μάζας m_i ως προς το O΄ είναι $\vec{r}_i'$. Η δύναμη που δρα στη στοιχειώδη μάζα m_i είναι $\vec{F}_i$ και η ολική ροπή (για όλες τις στοιχειώδεις μάζες) ως προς το O΄ είναι

$$\vec{G}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i \,.$$

Αλλά, $\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_o$ και $\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$. Επομένως,

$$\vec{G}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \left(\ddot{\vec{r}}_o + \ddot{\vec{r}}_i'\right) = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right) \times \ddot{\vec{r}}_o + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \ddot{\vec{r}}_i' = -\ddot{\vec{r}}_o \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right) + \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{r}}'\right) \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{J}}' = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{r}}'\right) = \vec{G}' + \ddot{\vec{r}}_o \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right)$$

Ο δεύτερος όρος του αθροίσματος είναι μηδενικός όταν:
(i) $\ddot{\vec{r}}_o = 0$
(ii) το O΄ ταυτίζεται με το κέντρο μάζας
(iii) $\ddot{\vec{r}}_o \parallel \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'$ (όπως η στρωτή κίνηση που εξετάσαμε σε παραδείγματα)
Ομοίως για την κινητική ενέργεια έχουμε:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_o^2 + \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_o \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i' + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i'^2$$

Για στιγμιαίο άξονα περιστροφής, $\dot{\vec{r}}_o = 0$. Άρα, η κινητική ενέργεια δίνεται μόνο από την ενέργεια περιστροφής περί τον στιγμιαίο άξονα. Άν πάρουμε την αρχή των αξόνων στο Κ.Μ. τότε έχουμε δύο όρους, την κινητική ενέργεια του Κ.Μ. και την ενέργεια περιστροφής περί το Κ.Μ.