Ενότητα 7
Συστήματα πολλών σωμάτων

Θεωρούμε τώρα ένα γενικό σύστημα N σωματίων που χαρακτηρίζονται από ένα δείκτη i=1,2,...,N, και αλληλεπιδρούν με δυνάμεις δυο σωμάτων, ενώ υφίστανται επίσης την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων από σώματα έξω από το σύστημα. Συμβολίζουμε με $\vec{F}_{ij}$ την δύναμη στο σωμάτιο i που προέρχεται από το σωμάτιο j, και με $\vec{F}_i$ την εξωτερική δύναμη στο i σωμάτιο. Οι εξισώσεις κίνησης λοιπόν είναι:

$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij} + \vec{F}_i$ (με $\vec{F}_{ii} = 0$, δηλ. στην ουσία το άθροισμα είναι για Ν-1 σωμάτια).

Επίσης, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$.

6.1 Ορμή. Κίνηση Κέντρου Μάζας

Άνυσμα κέντρου μάζας του συστήματος: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$, $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

Ολική ορμή του συστήματος: $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i = M\dot{\vec{R}}$

Δηλ. η ολική ορμή του συστήματος ισούται με την ορμή σωματίου μάζας Μ που βρίσκεται στο κέντρο μάζας. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij}}_{0} \Rightarrow \dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

Δηλαδή, μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις αλλάζουν την ολική ορμή. Στην ειδική περίπτωση απομονωμένου συστήματος σωματίων, στο οποίο δεν εξασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, ισχύει ο νόμος διατήρησης της ορμής δηλ. $\vec{P} = M\dot{\vec{R}} =$ σταθερό. Στην περίπτωση αυτή το κέντρο μάζας κινείται με σταθερή ταχύτητα.

6.2 Στροφορμή. Κεντρικές Εσωτερικές Δυνάμεις.

Ολική στροφορμή: $\vec{J} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι:

$$\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

Αν οι εσωτερικές δυνάμεις είναι κεντρικές, το παραπάνω διπλό άθροισμα ισούται με μηδέν, διότι $\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\beta\alpha} = \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} - \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\alpha\beta} = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)\times\vec{F}_{\alpha\beta} = 0$, εφόσον $\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta \parallel \vec{F}_{\alpha\beta}$ (για κεντρικές δυνάμεις).

Επομένως, για κεντρικές εσωτερικές δυνάμεις, $\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i \times \vec{F}_i$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ισούται με το άθροισμα των ροπών εξωτερικών δυνάμεων. Είναι συχνά βολικό να διαχωρίζουμε τις συμβολές στο $\vec{J}$, από την κίνηση του ΚΜ και από την σχετική κίνηση.

$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^{\,*}$, οπότε

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{R} + \vec{r}_i^{\,*}) \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^{\,*}) = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,*} \right)}_{0} \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,*} \right)}_{0} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,*} \times \dot{\vec{r}}_i^{\,*}$$

Συνεπώς, $\vec{J} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,*} \times \dot{\vec{r}}_i^{\,*} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{J}^*$, όπου $\vec{J}^* = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,*} \times \dot{\vec{r}}_i^{\,*}$, η στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας. Αντίστοιχα, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής γράφεται, $\dot{\vec{J}} = M\vec{R} \times \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{J}}^* = \vec{R} \times (M\ddot{\vec{R}}) + \dot{\vec{J}}^* \Rightarrow \dot{\vec{J}} = \vec{R} \times \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \dot{\vec{J}}^*$,

όπου $\dot{\vec{J}}^* = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,*} \times \ddot{\vec{r}}_i^{\,*} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i^{\,*} \times m_i \ddot{\vec{r}}_i^{\,*} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i^{\,*} \times \vec{F}_i$, δηλαδή, ο ρυθμός μεταβολής της $\vec{J}^*$ ισούται προς το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το κέντρο μάζας.

6.3 Ολική κινητική ενέργεια

Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος N σωματίων είναι:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^{\,*}) \cdot (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^{\,*}) = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \right) \dot{\vec{R}}^2 + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,*} \right)}_{0} \cdot \dot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,*2} =$$

$$\frac{1}{2} M\dot{\vec{R}}^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,*2} = \frac{1}{2} M\dot{\vec{R}}^2 + T^*$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας γράφεται ως:

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot (m_i \ddot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}) = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij}$$

Εδώ έχουμε $\dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \vec{F}_{\alpha\beta} + \dot{\vec{r}}_\beta \cdot \vec{F}_{\beta\alpha} = \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \vec{F}_{\alpha\beta} - \dot{\vec{r}}_\beta \cdot \vec{F}_{\alpha\beta} = (\dot{\vec{r}}_\alpha - \dot{\vec{r}}_\beta) \cdot \vec{F}_{\alpha\beta} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\alpha\beta}$ που είναι ο ρυθμός με τον οποίο η $\vec{F}_{\alpha\beta}$ παράγει έργο, και δεν είναι γενικά ίσος με μηδέν.

Πάντως είναι προφανές ότι η $\dot{T}$ γράφεται συναρτήσει μόνο των εξωτερικών δυνάμεων. Υπάρχουν ορισμένες ειδικές περιπτώσεις στις οποίες μια δύναμη δεν παράγει έργο. Π.χ.

- όταν $\dot{r} = 0$ (αντίδραση σε ακίνητο άξονα)
- όταν η $\vec{F}$ είναι πάντα κάθετη στην $\dot{\vec{r}}$ (μαγνητική δύναμη σε φορτισμένο σωμάτιο)
- όταν έχουμε συμπαγές σώμα, στο οποίο οι αποστάσεις ανάμεσα σε όλα τα σωμάτια που το αποτελούν παραμένουν αμετάβλητες. Τότε το $|\vec{r}|$ είναι σταθερό και $\vec{r}.\dot{\vec{r}} = 0$, οπότε, αν η δύναμη είναι κεντρική, έχει την ίδια διεύθυνση με το $\vec{r}$, οπότε $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} = 0$ και δεν παράγει έργο. *Περίπτωση στερεού σώματος.*

Ας κάνουμε τώρα την λιγότερο περιοριστική υπόθεση ότι οι δυνάμεις είναι διατηρητικές. Τότε η $\vec{F}_{\alpha\beta}$ πρέπει να αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση δυναμικής ενέργειας των σωματίων *α* και *β* και ο ρυθμός $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\alpha\beta}$ θα είναι ίσος με μείον το ρυθμό μεταβολής αυτής της δυναμικής ενέργειας. Το άθροισμα όλων των δυναμικών ενεργειών για όλα τα $\frac{1}{2}N(N-1)$ ζεύγη είναι η ολική εσωτερική δυναμική ενέργεια V_{int}. Έτσι παίρνουμε $\frac{d}{dt}(T+V_{\text{int}})=\sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$, δηλαδή, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής συν της εσωτερικής δυναμικής ενέργειας είναι ίσος με τον ρυθμό παραγωγής έργου από τις εξωτερικές δυνάμεις.

Στο σύστημα κέντρου μάζας, αποδεικνύεται ότι μπορούμε να γράψουμε
$\frac{d}{dt}(T^* + V_{\text{int}}) = \sum_i \dot{\vec{r}}_i^{\,*} \cdot \vec{F}_i$.
(η V_{int}, εξαρτάται μόνο από τις διαφορές $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ και επομένως είναι ανεξάρτητη από την επιλογή πλαισίου αναφοράς). Η $T^* + V_{\text{int}}$ είναι η ολική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας.

Αν τώρα και οι εξωτερικές δυνάμεις είναι διατηρητικές, τότε θα πρέπει να υπάρχει η αντίστοιχη συνάρτηση εξωτερικής δυναμικής ενέργειας V_{ext}, της οποίας ο ρυθμός μεταβολής είναι μείον ο ρυθμός παραγωγής έργου των εξωτερικών δυνάμεων.
Δηλαδή $\frac{d}{dt}(T+V_{\text{int}}) = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i = -\frac{dV_{ext}}{dt} \Rightarrow T+V=E=$ σταθερό, όπου
$V = V_{\text{int}} + V_{ext}$.

Ανακεφαλαίωση για σύστημα πολλών σωμάτων:

$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i = M\dot{\vec{R}}$ και $\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$

$\vec{J} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ και $\dot{\vec{J}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ (για κεντρικές εσωτερικές δυνάμεις)

$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$ και $\dot{T} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$ (για εσωτερικές δυνάμεις που δεν παράγουν έργο – στερεό σώμα)