Ενότητα 6
Το πρόβλημα των δυο σωμάτων

Θεωρούμε ένα απομονωμένο σύστημα δυο σωμάτων που υπόκεινται μονάχα στις μεταξύ τους δυνάμεις και στην επίδραση ενός ομογενούς βαρυτικού πεδίου.

5.1 Κέντρο μάζας και σχετικές συντεταγμένες

$m_1\ddot{\vec{r}} = m_1\vec{g} + \vec{F}$ (όπου $\vec{F}$ η δύναμη από το 2 στο 1)

$m_2\ddot{\vec{r}} = m_2\vec{g} - \vec{F}$ (όπου $\vec{F}$ η δύναμη από το 1 στο 2)

$\vec{g} = -g\hat{k}$

Ορίζουμε $\vec{R} \equiv \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ (άνυσμα θέσης του κέντρου μάζας), $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ και

$M \equiv m_1 + m_2$

- $\ddot{\vec{R}} \equiv \dfrac{1}{M}\left(m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2\right) = \dfrac{1}{M}\left(m_1\vec{g} + \vec{F} + m_2\vec{g} - \vec{F}\right) = \vec{g}$ (5.1.1),

  ή, $M\ddot{\vec{R}} = M\vec{g}$, δηλ. το κέντρο μάζας κινείται με ομαλή επιτάχυνση $\vec{g}$.

  Αν $\vec{g} = 0$, τότε $M\dot{\vec{R}} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = p =$ σταθ. (διατήρηση της ορμής).

- $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left(\vec{g} + \dfrac{\vec{F}}{m_1} - \vec{g} + \dfrac{\vec{F}}{m_2}\right) = \dfrac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}\vec{F}$ (5.1.2)

  ή, $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, όπου $\mu \equiv \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ η ανηγμένη μάζα.

Οι (5.1.1) και (5.1.2) είναι δυο ανεξάρτητες εξισώσεις.
Ο παραπάνω διαχωρισμός επεκτείνεται τόσο στην στροφορμή όσο και στην κινητική ενέργεια.

$$\vec{J} = m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = m_1\left(\vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}\right) \times \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right) + m_2\left(\vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}\right) \times \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right) =$$

$$= M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{R} \times M\dot{\vec{R}} + \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2} = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right) \cdot \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right) \cdot \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2}$$

5.2 Το σύστημα κέντρου μάζας

Είναι συχνά βολικό να θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων $\left(x^*, y^*, z^*\right)$, στο οποίο το κέντρο μάζας είναι ακίνητο και στην αρχή των αξόνων. Δηλαδή, το σύστημα αυτό κινείται με το Κ.Μ. Τότε, σ΄αυτό το σύστημα έχουμε:

$\vec{R}^* \equiv 0$, $\vec{r}_1^{\,*} = \dfrac{m_2}{M}\vec{r}$, $\vec{r}_2^{\,*} = -\dfrac{m_1}{M}\vec{r}$ και $m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,*} = \mu\dot{\vec{r}} = -m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,*} \equiv \vec{p}^{\,*}$ (ορμές ίσες και αντίθετες).

Αφού λύσουμε το πρόβλημα στο σύστημα Κ.Μ., μετά χρησιμοποιούμε τις σχέσεις
$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1^*$, $\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_2^*$
π.χ. για τις ορμές στο Σύστημα Εργαστηρίου θα έχουμε
$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_1^*$, $\dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_2^* \Rightarrow$

$$\vec{p}_1 = m_1\dot{\vec{r}}_1 = m_1\dot{\vec{R}} + \vec{p}^*, \ \vec{p}_2 = m_2\dot{\vec{r}}_2 = m_2\dot{\vec{R}} - \vec{p}^* \tag{5.2.1}$$

Η ολική στροφορμή και η κινητική ενέργεια στο σύστημα κέντρου μάζας θα είναι:

$$\vec{J}^* = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p}^*$$

$$T^* = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 = \frac{\vec{p}^{*2}}{2\mu}$$

Σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$$

$$\vec{J} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{J}^*$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + T^*$$

Δηλαδή για να πάρουμε τις τιμές σε κάθε σύστημα από αυτές του Κ.Μ., πρέπει μόνο να προσθέσουμε τη συμβολή σωματίου με μάζα Μ τοποθετημένου στο κέντρο μάζας $\vec{R}$.

5.3 Ελαστικές κρούσεις

Ελαστική κρούση $\Rightarrow$ ολική κινητική ενέργεια διατηρείται.
Η μελέτη μιας τέτοιας κρούσης γίνεται εύκολα στο σύστημα Κ.Μ.. Στο σύστημα αυτό τα σωμάτια πρέπει να πλησιάζουν το ένα το άλλο με ίσες και αντίθετες ορμές, $\vec{p}^*$ και - $\vec{p}^*$, και μετά την κρούση απομακρύνονται το ένα από το άλλο με ίσες και αντίθετες ορμές $\vec{q}^*$ και - $\vec{q}^*$. Επειδή η κρούση είναι ελαστική, έχουμε:

$$T^*_{\pi\rho\iota\nu} = T_{\mu\varepsilon\tau\alpha}{}^* \Rightarrow \frac{\vec{p}^{*2}}{2\mu} = \frac{\vec{q}^{*2}}{2\mu} \Rightarrow |\vec{q}^*| = |\vec{p}^*|$$

Συνήθως οι κρούσεις στο εργαστήριο γίνονται με το ένα σωμάτιο σε ηρεμία αρχικά, δηλ. $\vec{p}_2 = 0$. Οπότε, από την (6.3.1) προκύπτει ότι $\dot{\vec{R}} = \frac{1}{m_2}\vec{p}^*$, και

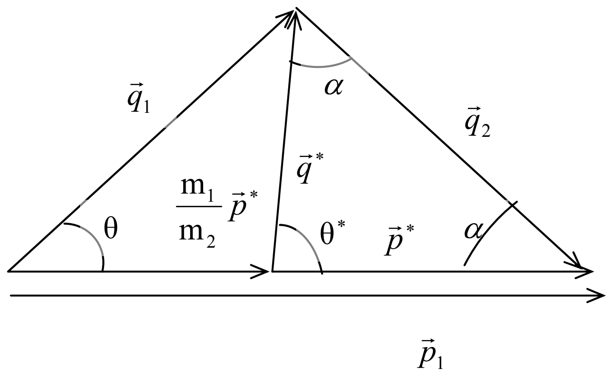
$$\vec{p}_1 = m_1\dot{\vec{R}} + \vec{p}^* = \frac{m_1}{m_2}\vec{p}^* + \vec{p}^* = \frac{M}{m_2}\vec{p}^*.$$

Μετά την κρούση, οι ορμές δίνονται πάλι από τις (6.3.1), με το $\vec{q}^*$ στην θέση του $\vec{p}^*$. Οπότε έχουμε:

$$\vec{q}_1 = m_1\dot{\vec{R}} + \vec{q}^* = \frac{m_1}{m_2}\vec{p}^* + \vec{q}^*$$

$$\vec{q}_2 = m_2\dot{\vec{R}} - \vec{q}^* = \vec{p}^* - \vec{q}^*$$

Βοηθητικό διάγραμμα: (δίνει κάθε επιθυμητή σχέση ανάμεσα σε ορμές, ενέργειες, γωνίες)



Παραδείγματα χρήσιμων σχέσεων που προκύπτουν από το διάγραμμα αυτό:

$$\vec{p}_1 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$$

$$a = \frac{\pi - \theta^*}{2}$$

$$\frac{q_2}{2} = p^* \sin\frac{\theta^*}{2} \Rightarrow q_2 = 2p^* \sin\frac{\theta^*}{2}$$

$$T_2 = \frac{q_2^2}{2m_2} = \frac{2p^{*2}\sin^2\frac{\theta^*}{2}}{m_2}$$

$$T_{o\lambda} = \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{M^2 p^{*2}}{2m_1 m_2^2}$$

Οπότε, $\frac{T_2}{T} = \frac{4m_1 m_2}{M^2}\sin^2\frac{\theta^*}{2}$

Είναι προφανές ότι για μετωπικές κρούσεις, δηλ. για $\theta^* = \pi$, έχουμε την μέγιστη μεταβίβαση ενέργειας.

$$\tan\theta = \frac{q^*\sin\theta^*}{\frac{m_1}{m_2}p^* + q^*\cos\theta^*} = \frac{\sin\theta^*}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\theta^*}, \ 0 \le \theta^* \le \pi$$

που είναι ανεξάρτητη από τις ορμές των σωματίων, και εξαρτάται μόνο από τον λόγο $\frac{m_1}{m_2}$.

Περίπτωση 1: $m_1 < m_2$, $0 \le \theta^* \le \pi \Rightarrow 0 \le \theta \le \pi$

Περίπτωση 2: $m_1 > m_2$, $0 \le \theta^* \le \pi \Rightarrow 0 \le \theta \le \theta_{\max}$, όπου $\theta_{\max} = \sin^{-1}\frac{m_2}{m_1}$.

Για $m_1 = m_2$, $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$