Ενότητα 5: Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς

5.1 Σχέση δύναμης – επιτάχυνσης

Σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, γράφουμε $\vec{F}=m\vec{a}$. *<u>Σε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς, δεν μπορούμε να γράψουμε μια τέτοια εξίσωση.</u>*

Ας θεωρήσουμε ένα αδρανειακό σύστημα $O_\alpha x_\alpha y_\alpha z_\alpha$ και ένα ***<u>μη</u>*** αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Oxyz$. Η αρχή, Ο, επιταχύνεται ως προς την αρχή O_α και το σύστημα $Oxyz$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}=\vec{\omega}(t)$. Έστω, $\vec{R}$ το άνυσμα θέσης του O στο σύστημα O_α. Έστω, επίσης, μια μάζα, *m*, της οποίας το άνυσμα θέσης είναι $\vec{r}_\alpha$ στο σύστημα O_α και $\vec{r}$ στο σύστημα $Oxyz$. Στο σύστημα $Oxyz$, θα έχουμε:

$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, και $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}$.

Στο σύστημα O_α ισχύει:

$$[\frac{d\vec{r}}{dt}]_\alpha=[\frac{d(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})}{dt}]_\alpha=[\frac{d\vec{r}}{dt}]_O+(x\dot{\hat{i}}+y\dot{\hat{j}}+z\dot{\hat{k}})=\vec{v}+\vec{\omega}\times\vec{r}, \quad (5.1.1)$$

επειδή: $\dot{\hat{i}}=\vec{\omega}\times i$, $\dot{\hat{j}}=\vec{\omega}\times j$ και $\dot{\hat{k}}=\vec{\omega}\times\hat{k}$. Το ίδιο ισχύει και για το τυχαίο διάνυσμα

$$\vec{A}: \quad [\frac{d\vec{A}}{dt}]_\alpha=[\frac{d\vec{A}}{dt}]_O+\vec{\omega}\times\vec{A}. \quad (5.1.2)$$

Τώρα, στο σύστημα O_α ισχύει: $\vec{r}_\alpha=\vec{R}+\vec{r}\Rightarrow[\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt}]_\alpha=[\frac{d\vec{R}}{dt}]_\alpha+[\frac{d\vec{r}}{dt}]_\alpha$ αλλά

$$[\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt}]_\alpha\equiv\vec{v}_\alpha, \text{ οπότε: } \vec{v}_\alpha=\dot{\vec{R}}+(\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k})+(x\dot{\hat{i}}+y\dot{\hat{j}}+z\dot{\hat{k}}). \quad (5.1.3)$$

Λόγω της (5.1.1) η (5.1.3) γίνεται: $\vec{v}_\alpha=\dot{\vec{R}}+[\frac{d\vec{r}}{dt}]_O+(x\dot{\hat{i}}+y\dot{\hat{j}}+z\dot{\hat{k}})=\dot{\vec{R}}+\vec{v}+\vec{\omega}\times\vec{r}.$

(5.1.4)

Ας θεωρήσουμε τώρα το διάνυσμα $\vec{v}_\alpha$. Λόγω της (5.1.4) μπορούμε να γράψουμε:

$\dot{\vec{v}}_\alpha=\vec{a}_\alpha=[\frac{d(\dot{\vec{R}}+\vec{v}+\omega\times r)}{dt}]_\alpha=[\ddot{\vec{R}}]_\alpha+[\frac{d\vec{v}}{dt}]_\alpha+\frac{d(\omega\times r)}{dt}$. Χρησιμοποιώντας τις 5.1.1 και 5.1.2 για τους διάφορους όρους του 2^{ου} σκέλους της παραπάνω εξίσωσης, βρίσκουμε τελικά ότι:

$\vec{a}_\alpha=[\ddot{\vec{R}}]_\alpha+\vec{a}+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+2\vec{\omega}\times v+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ και άρα:

$$\vec{F}_O=\vec{F}-m[\ddot{\vec{R}}]_\alpha-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}-2\mathrm{m}\,\vec{\omega}\times\vec{v}-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}), \quad (5.1.5)$$

όπου $\vec{F}_O=m\vec{a}$ και $\vec{F}=m\vec{a}_\alpha$.

$m[\ddot{\vec{R}}]_\alpha$: ψευδοδύναμη λόγω επιτάχυνσης του $Oxyz$

$m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$: ψευδοδύναμη λόγω μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του $Oxyz$ (αν υπάρχει).

$-2\mathrm{m}\,\vec{\omega}\times\vec{v}$: ψευδοδύναμη Coriolis

$-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$: φυγόκεντρη (ψευδο)δύναμη

Σημείωση: $[\dot{\vec{\omega}}]_\alpha = \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times\vec{\omega} = \dot{\vec{\omega}}$ **,** δηλαδή η γωνιακή επιτάχυνση είναι ίδια και για τα δυο συστήματα συντεταγμένων.

Εφαρμογή 1: **Μελέτη της κίνησης σωμάτων από (μη αδρανειακό) παρατηρητή, Ο, που βρίσκεται σε κάποια θέση στην επιφάνεια της Γης.**

Θεωρούμε μόνο την περιστροφή της γης περί τον άξονά της με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ω ($\omega = 2\pi/1d = 7.3\times10^{-5}\, rad/s$). Έστω αδρανειακός παρατηρητής O_α τοποθετημένος στο κέντρο της γης. Η δύναμη που εφαρμόζεται (για τον O_α) σ΄ ένα σώμα μάζας m με άνυσμα θέσης $\vec{r}_\alpha$ (ως προς τον αδρανειακό παρατηρητή) είναι $\vec{F} = -G\dfrac{Mm}{r_\alpha^2}\hat{r}_\alpha$. Από την 5.1.5, έχουμε (εφόσον $\dot{\vec{\omega}}=0$):

$$\vec{F}_O = -G\frac{Mm}{r_\alpha^2}\hat{r}_\alpha - m[\ddot{\vec{R}}]_\alpha - 2m\,\vec{\omega}\times\vec{\upsilon} - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \quad . (5.1.6)$$

Λόγω της 5.1.2 ισχύει: $[\dot{\vec{R}}]_\alpha = \vec{\omega}\times\vec{R}$, και άρα,

$$[\ddot{\vec{R}}]_\alpha = \left[\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{R})\right]_\alpha = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{R} + \vec{\omega}\times[\dot{\vec{R}}]_\alpha = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}) \quad . (5.1.7)$$

Λόγω της (5.1.7) η (5.1.6) γίνεται τελικά:

$$\vec{F}_O = -G\frac{Mm}{r_\alpha^2}\hat{r}_\alpha - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}) - 2m\,\vec{\omega}\times\vec{\upsilon} - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \quad .$$

Προσέγγιση: Για κινήσεις για τις οποίες $|r| << |R|$ αγνοούμε την φυγοκεντρική δύναμη και γράφουμε τελικά:

$$\vec{F}_O = \underbrace{-G\frac{Mm}{r_\alpha^2}\hat{r}_\alpha - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})} - 2m\,\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}$$

Αυτή είναι η επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g}$ που μετράμε στο εργαστήριο.
Δηλ. στην πραγματικότητα, η ζυγοστάθμη δεν κατευθύνεται ακριβώς προς το κέντρο της Γης αλλά αποκλίνει λόγω του φυγοκεντρικού όρου, $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})$, που εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος, ***λ***. Θέτοντας $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \lambda$, βρίσκουμε ότι: $|\omega\times(\omega\times R)| = \omega^2 R\sin\theta$. Η οριζόντια και η κάθετη συνιστώσα του $\vec{g}$ είναι:

$g_h = \omega^2 R\sin\theta\cos\theta$ και $g_v = g_O - \omega^2 R\sin\theta\cos\theta$ (όπου θέσαμε $\vec{g}_\alpha = -G\dfrac{Mm}{r_\alpha^2}\hat{r}_\alpha$).

Χρησιμοποιώντας την τιμή του ω που βρήκαμε παραπάνω και την μέση ακτίνα της γης που είναι 6370km, βρίσκουμε ότι $\omega^2 R = 3.4 cm\ sec^{-2} << |g_a|$. Γι' αυτό το λόγο, η γωνία, α, ανάμεσα στην φαινομενική κατακόρυφο και την πραγματική είναι προσεγγιστικά

$$\alpha \approx \frac{g_h}{g_v} \approx \frac{\omega^2 R}{g_\alpha}\sin\theta\cos\theta.$$

Η μέγιστη τιμή συμβαίνει για $\theta = 45^o$ και είναι περίπου ίση με $0^o6'$. Στους πόλους δεν υπάρχει φυγόκεντρη δύναμη, επομένως εκεί $\vec{g} = \vec{g}_\alpha$. Στον ισημερινό, $g = g_\alpha - \omega^2 R$.

Σύμφωνα με αυτά, θα περιμέναμε ότι $g_{πολ} - g_{ισημ} = 3.4 cms^{-2}$, ενώ η μετρούμενη διαφορά είναι μεγαλύτερη ($5.2 cms^{-2}$). Αυτό οφείλεται στο ότι η Γη είναι πεπλατυσμένη στους πόλους (λόγω της περιστροφής της).

Εφαρμογή 2: Δύναμη Coriolis

Παράδειγμα 1*: Κίνηση σωματίου κοντά στην επιφάνεια της γης ($|r| << |R|$) σε γεωγραφικό πλάτος, λ, υπό την επίδραση μιας δύναμης $\vec{F}$.*

Θεωρούμε μη-αδρανειακό παρατηρητή *O*. Η εξίσωση κίνησης γι' αυτόν τον παρατηρητή είναι: $\vec{F}_O = m\ddot{\vec{r}} = -m\vec{g} + \vec{F} - 2\mathrm{m}\,\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}$ (όπου $\vec{g} = -G\dfrac{Mm}{r_\alpha^2}\hat{r}_\alpha - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})$).

Επιλέγουμε το σύστημα αξόνων έτσι ώστε το $\hat{i}$ να δείχνει ανατολικά, το $\hat{j}$ στον βορά και το $\hat{k}$ προς τα πάνω. Τότε, *ω=(0, ωsinθ, ωcosθ),* συνεπώς η δύναμη Coriolis είναι: $-2m\omega\times\upsilon = 2m\omega(\dot{y}\cos\theta - \dot{z}\sin\theta, -\dot{x}\cos\theta, \dot{x}\sin\theta)$.

Ελεύθερη πτώση σώματος από ύψος h: ($\vec{F}=0$ και αρχική θέση *z=h, x=y=0, αρχική ταχύτητα =0).* Λόγω της πτώσης του σώματος είναι εύλογο να κάνουμε την προσέγγιση $|\dot{x}| << |\dot{z}|$ και $|\dot{y}| << |\dot{z}|$. Έτσι η δύναμη Coriolis γράφεται ως $-2m\omega\times\upsilon = -2m\omega\dot{z}\sin\theta\,\hat{i}$ και οι εξισώσεις κίνησης γράφονται:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x} \approx -2\omega\dot{z}\sin\theta \Rightarrow \dot{x} = \omega g\sin\theta\, t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}\omega g\sin\theta\, t^3 \\
&\ddot{y} \approx 0 \\
&\ddot{z} \approx -g \Rightarrow \dot{z} = gt \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2h}{g}}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{ολ} = \frac{1}{3}\omega\left(\frac{8h^3}{g}\right)^{1/2}\cos\lambda$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$). Στον ισημερινό (λ=0), έχουμε, προφανώς,

$x_{ολ} = \frac{1}{3}\omega\left(\frac{8h^3}{g}\right)^{1/2} = \frac{\omega g}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$. Προσέξτε ότι *η προς τα πάνω ρήψη* **<u>δεν</u>** έχει την ίδια απόκλιση με την ελεύθερη πτώση.

Παράδειγμα 2: *Το εκκρεμές του Foucault*

Είδαμε προηγουμένως ότι για κίνηση σωματίου κοντά στην επιφάνεια της γης ($|r| << |R|$) σε γεωγραφικό πλάτος, λ, υπό την επίδραση μιας δύναμης $\vec{F}$,
η εξίσωση κίνησης γράφεται: $\vec{F}_O = m\ddot{\vec{r}} = -m\vec{g} + \vec{F} - 2\mathrm{m}\,\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}$.
Θεωρούμε την περίπτωση που έχουμε ένα εκκρεμές ελεύθερο να αιωρείται προς όλες τις διευθύνσεις, φτιαγμένο έτσι ώστε να είναι τελείως συμμετρικό, δηλ. οι περίοδοι ταλάντωσής του προς όλες τις κατευθύνσεις να είναι ίσες (εκκρεμές του Foucault).

Στην περίπτωση αυτή η $\vec{F}$ είναι η τάση του νήματος $\vec{T}$. Οπότε η εξίσωση κίνησης γράφεται ως: $m\ddot{\vec{r}} = -m\vec{g} + \vec{T} - 2\mathrm{m}\,\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}$. Ισχύει ότι:
$-2m\omega\times\upsilon = 2m\omega\dot{y}\sin\lambda\hat{i} - 2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda)\hat{j} + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda\hat{k}$ και (βλ. βιβλίο Τσίγανου, σελ. 376) $T_x = -T\dfrac{x}{l}$, $T_y = -T\dfrac{y}{l}$, $T_z = T\dfrac{l-z}{l}$. Συνεπώς, οι εξισώσεις κίνησης γράφονται:

$$m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y}\sin\lambda - \mathrm{T}\frac{x}{l}$$

$$m\ddot{y} = -2m\omega(\dot{x}\sin\lambda - \dot{z}\cos\lambda) - \mathrm{T}\frac{y}{l}$$

$$m\ddot{z} = 2m\omega\dot{y}\cos\lambda + T\frac{l-z}{l} - mg$$

Για μικρές ταλαντώσεις $|x|,|y|,|z| << l$, έχουμε σχεδόν οριζόντια κίνηση, δηλ.
$|\dot{z}| << |\dot{x}|,|\dot{y}|$ και , οπότε, έχουμε:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y}\sin\lambda + g\frac{x}{l} = 0$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\sin\lambda + g\frac{y}{l} = 0$$

Το σύστημα αυτό καθορίζει την κίνηση του εκκρεμούς πάνω στο επίπεδο *xy*. Για την λύση του συστήματος, έστω $\zeta = x + iy$. Τότε, από το σύστημα των δύο εξισώσεων προκύπτει ότι: $\ddot{\zeta} + 2i\omega\sin\lambda\dot{\zeta} + \dfrac{g}{l}\zeta = 0$.

Θέτοντας $\omega_o^2 = \dfrac{g}{l}$, $\omega_1 = \omega\sin\lambda$ παίρνουμε $\ddot{\zeta} + 2i\omega_1\dot{\zeta} + \omega_o^2\zeta = 0$, με γενική λύση (για $\omega_o >> \omega_1$): $\zeta = \left(Ae^{i\omega_o t} + Be^{-i\omega_o t}\right)e^{-i\omega_1 t} = x + iy$

Άρα, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega_1 t & \sin\omega_1 t \\ -\sin\omega_1 t & \cos\omega_1 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ όπου $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\cos\omega_o t + c_2\sin\omega_o t \\ c_3\cos\omega_o t + c_4\sin\omega_o t \end{pmatrix}$ (που δίνουν τη θέση του εκκρεμούς για ω_l=0). Δηλ. το επίπεδο ταλάντωσης του εκκρεμούς στρέφεται, με περίοδο $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega\sin\lambda}$.