Ενότητα 4: Κεντρικές διατηρητικές δυνάμεις

Έστω $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ κεντρικό πεδίο δυνάμεων. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, δηλ. είναι διατηρητικό: $\vec{F} = -\nabla V(r)$.

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, γενικά:

$$ma_r = F_r = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

$$ma_\theta = F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta},$$

$$ma_\varphi = F_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

Εφόσον το πεδίο δυνάμεων είναι κεντρικό, θα πρέπει προφανώς να ισχύει:
$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$. Επομένως, $\vec{F} = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$.

Οι Νόμοι της Διατήρησης:
Εφόσον το πεδίο είναι διατηρητικό πεδίο δυνάμεων έχουμε δύο νόμους διατήρησης:

$$\frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}})^2 + V(r) = E = σταθερό,$$ και

$$m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{J} = σταθερό.$$

ή:

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E$$

$$mr^2\dot{\theta} = J$$

Όπως και στην μονοδιάστατη περίπτωση μπορούμε να πάρουμε χρήσιμες πληροφορίες από τους νόμους διατήρησης. Απαλείφοντας το $\dot{\theta}$ από τις παραπάνω εξισώσεις, βρίσκουμε :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{J^2}{2mr^2} + V(r)}_{U(r)=\text{ενεργή δυναμική ενέργεια}} = E$$

Συνεπώς, η κίνηση περιορίζεται στην περιοχή τιμών του r, όπου $U(r) \le E$.

4.1 Ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής

Σωμάτιο κινείται στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων: $\vec{F}=-kr\hat{r}.$
Η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$m\ddot{\vec{r}}+k\vec{r}=0 \begin{cases} m\ddot{x}+kx=0 \\ m\ddot{y}+ky=0 \\ m\ddot{z}+kz=0 \end{cases}$$

Θέτοντας $\omega^2=\dfrac{k}{m}$, η γενική λύση δίνεται από:

$$\left.\begin{array}{l} x=c_x\cos\omega t+d_x\sin\omega t \\ y=c_y\cos\omega t+d_y\sin\omega t \\ z=c_z\cos\omega t+d_z\sin\omega t \end{array}\right\} \quad \vec{r}=\vec{c}\cos(\omega t)-\vec{d}\sin(\omega t). \qquad (4.1.1)$$

Οι σταθερές $\vec{c}$ και $\vec{d}$ καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες: $\vec{c}=\vec{r}_0, \vec{d}=\dfrac{\upsilon_0}{\omega}$.

Η τροχιά του ταλαντωτή είναι η συντεταγμένη δύο ταλαντώσεων πάνω στους άξονες $\vec{c}$ και $\vec{d}$ οι οποίοι δεν είναι απαραίτητα κάθετοι μεταξύ τους. Για να περιγράψουμε την κίνηση σε ορθογώνιους άξονες, γράφουμε:

$$\vec{r}=\vec{a}\cos(\omega t-\theta)+\vec{b}\sin(\omega t-\theta) \qquad (4.1.2)$$

όπου,

$$\left.\begin{array}{l} \vec{c}=\vec{a}\,cos\theta-\vec{b}\,sin\theta \\ \vec{d}=\vec{a}\,sin\theta-\vec{b}\,cos\theta \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \vec{a}=\vec{c}\,cos\theta+\vec{d}\,sin\theta \\ \vec{b}=-\vec{c}\,sin\theta+\vec{d}\,cos\theta \end{array} \qquad (4.1.3)$$

Επιλέγουμε τώρα το θ έτσι ώστε $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-(\vec{c}^2-\vec{d}^2)\,sin\theta\,cos\theta+\vec{c}\cdot\vec{d}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0 \Rightarrow tan2\theta=\frac{2\,\vec{c}\cdot\vec{d}}{\vec{c}^2-\vec{d}^2},$$

(διότι $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$).

Επιλέγουμε, τώρα, άξονες x,y, έτσι ώστε $\hat{x}\parallel\vec{a}$ και $\hat{y}\parallel\vec{b}.$ Τότε, από την (4.1.2) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos(\omega t-\theta) \\ \mathrm{y=bsin(\omega s-\theta)} \\ \mathrm{z=0} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} z=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{array}$$

που είναι η εξίσωση έλλειψης πάνω στο επίπεδο xy, με αρχή το (0,0) και ημιάξονες *a* και *b*. Τα *a* και *b* μπορούν να προσδιοριστούν εύκολα από τις (4.1.3), από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$a^2+b^2=c^2+d^2,$$
$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}.$$

Αν, φ, η γωνία μεταξύ των $\vec{c}$ και $\vec{d}$, τότε φθάνουμε στην εξίσωση δευτέρου βαθμού για τα a^2 ή b^2:

$$a^4-(c^2+d^2)a^2+c^2d^2\sin^2\varphi=0$$

4.2 Ο νόμος του αντιστρόφου τετραγώνου

Θεωρούμε μία δύναμη της μορφής $\vec{F}=\frac{k}{r^2}\hat{r}$, άρα η αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $V(r)=\frac{k}{r}$, και η ακτινική κινητική ενέργεια είναι ίση με:
$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{J^2}{2mr^2}+V(r)=E$, ενώ η $U(r)=\frac{J^2}{2mr^2}+\frac{k}{r}$ είναι η ενεργός συνάρτηση δυναμικής ενέργειας.

Περίπτωση 1: Απωστική δύναμη $k>0$

Π.χ. ηλεκτροστατική δύναμη, $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}q_1q_2$, με τα q_1, q_2 [1] ομόσημα.

Στην περίπτωση αυτή η *U(r)* μειώνεται μονότονα από το $+\infty$ στο *r*=0, μέχρι το 0 όταν $r\to\infty$. Δηλαδή η *U(r)* δεν έχει ελάχιστα και η κυκλική κίνηση είναι προφανώς αδύνατη. Για κάθε θετική τιμή του E, υπάρχει μια ελάχιστη τιμή του r, r_1, η οποία είναι η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης *U(r)=E*. Μέγιστη τιμή του *r* δεν υπάρχει. Η τροχιά που ακολουθεί το σωμάτιο σε αυτή την περίπτωση είναι μία υπερβολή (θα δειχθεί αργότερα). *Παράδειγμα*: Σκέδαση ομόσημων φορτίων

Περίπτωση 2: Ελκτική δύναμη $k<0$

Π.χ. 1) Ηλεκτροστατική δύναμη, $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}q_1q_2$, με τα q_1, q_2 ετερόσημα

2) Βαρυτική δύναμη $k=-Gm_1m_2$

Για λόγους που θα γίνουν αμέσως προφανείς, ορίζουμε ένα μέγεθος *l*, με διαστάσεις μήκους, από την $l\equiv\frac{J^2}{m|k|}$. Οπότε, $U(r)=|k|(\frac{l}{2r^2}-\frac{1}{r})$. Προφανώς, $U(l/2)=0$ και $U(l)=-\frac{|k|}{2l}=U(r)|_{\min}$. Τώρα θα εξετάσουμε τι γίνεται για διάφορες τιμές της *E*:

---
[1] Το ένα από τα δύο φορτία υποθέτουμε ότι είναι στην αρχή των αξόνων.

(i) $E=-\frac{|k|}{2l}=U(r)|_{\min}\Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{r}^2=0\Rightarrow r=l=\sigma\tau\alpha\theta.\Rightarrow$ η τροχιά είναι κύκλος με ακτίνα l.

Από την διατήρηση της ενέργειας έχουμε: $T=E-V=-\frac{|k|}{2l}-(-\frac{|k|}{l})=\frac{|k|}{2l}=\frac{1}{2}|V|$

$\therefore \frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{|k|}{2l}\Rightarrow \upsilon=\sqrt{\frac{|k|}{ml}}$

(ii) $-\frac{|k|}{2l}<E<0\Rightarrow r_1<r<r_2$.

Για να βρούμε τα r_1, r_2 λύνουμε την εξίσωση

$U(r)=E\Rightarrow \frac{J^2}{2mr^2}-\frac{|k|}{r}=E\Rightarrow Er^2+|k|r-\frac{J^2}{2m}=0$, άρα:

$$r_1=\frac{-|k|+\sqrt{k^2+2EJ^2/m}}{2E}<r_2$$

$$r_2=\frac{-|k|-\sqrt{k^2+2EJ^2/m}}{2E}>0,$$ διότι E<0.

Η τροχιά, όπως θα δούμε, είναι ελλειπτική με ημιμέγιστο άξονα $a=\frac{r_1+r_2}{2}=-\frac{|k|}{2E}$.

(iii) $E=0\Rightarrow \frac{l}{2}<r<\infty$. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε παραβολική τροχιά.

(iv) $E>0\Rightarrow r_1<r<\infty$, με $r_1<\frac{l}{2}$. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε υπερβολική τροχιά.

Εύρεση Τροχιών με την μέθοδο της ενέργειας.

Ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{l} T+V=E \\ mr^2\dot{\theta}=J \end{array}\right\} \quad \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{|k|}{r}=E$$. Ζητάμε το $r=r(\theta)$.

Η λύση είναι:

$r[e\cos(\theta-\theta_0)-1]=l$, στην περίπτωση της άπωσης, και
$r[e\cos(\theta-\theta_0)+1]=l$, στην περίπτωση της έλξης (θ_0 είναι μία αυθαίρετη σταθερά).

Κατάταξη τροχιών:

$e=0$,	$E=-\frac{mk^2}{2J^2}=-\frac{|k|}{2l}$	κύκλος
$0<e<1$,	$-\frac{mk^2}{2J^2}<E<0$,	έλλειψη
$e=1$,	$E=0$,	παραβολή
$e>1$,	$E>0$,	υπερβολή

4.3 Ελλειπτικές τροχιές – Νόμοι του Kepler

1ος Οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις.

Ισχύει για δέσμια συστήματα, δηλ. όταν: $-\frac{mk^2}{2J^2} < E < 0$. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η εξίσωση της έλλειψης (που την βρήκαμε πιο πάνω σε πολικές συντεταγμένες) γράφεται:

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ όπου } a = \frac{l}{1-e^2} = \frac{|k|}{2|E|},\ b^2 = al = \frac{J^2}{2m|E|}$$

Δηλ. η εστιακή απόσταση της έλλειψης είναι ίση με ae (όπου e η εκκεντρότητα), το εστιακό ημιπλάτος είναι ίσο με l, και εξαρτάται από την στροφορμή, ενώ ο μεγάλος ημιάξονας *a,* καθορίζεται από την ολική ενέργεια *E.*

2ος Η επιβατική ακτίνα, που συνδέει τον πλανήτη με τον ήλιο διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους.

Γεωμετρικά: το ακτινικό διάνυσμα διαγράφει εμβαδόν $dA = \frac{1}{2}(rd\theta)r = \frac{1}{2}r^2 d\theta$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{J}{2m} = \text{σταθ.}$$

3ος Τα τετράγωνα των περιόδων περιστροφής των πλανητών γύρω από τον ήλιο, είναι ανάλογα των κύβων των μεγάλων ημιαξόνων των ελλειπτικών τροχιών τους.

$$T = \frac{A_{\text{έλλειψης}}}{dA/dt} = \frac{\pi ab}{J/2m} = \frac{2\pi mab}{J} \Rightarrow \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = m^2\frac{a^2b^2}{J^2} = m^2\frac{a^2a^2(1-e^2)}{J^2} = ma^4\frac{2|E|}{k^2} = \frac{m}{|k|}a^3$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $|E| = \frac{|k|}{2a}$.

4.4 Υπερβολικές τροχιές

Εξίσωση της υπερβολής (που την βρήκαμε πιο πάνω σε πολικές συντεταγμένες) γράφεται:

$$\frac{(x-ae)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ όπου } a = \frac{l}{e^2-1} = \frac{|k|}{2E},\ b^2 = al = \frac{J^2}{2mE}$$

Ο θετικός κλάδος της υπερβολής αντιστοιχεί σε έλξη, ενώ ο αρνητικός σε άπωση.

Άπωση: το $r \to \infty$, όταν $\theta = \pm\cos^{-1}(1/e)$

Έλξη: το $r \to \infty$, όταν $\theta = \pi \pm \cos^{-1}(1/e)$

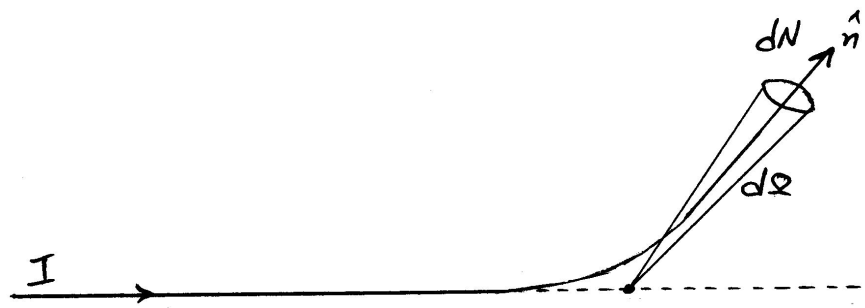
Γωνία απόκλισης του σωματίου (γωνία σκέδασης): $\Theta = \pi - 2\cos^{-1}(1/e)$ και στις δυο περιπτώσεις.

Συναρτήσει της οριακής ταχύτητας *υ,* και της παραμέτρου πρόσκρουσης *b* (που ταυτίζεται με τον μικρό ημιάξονα της υπερβολής), το $b = \frac{|k|}{m\upsilon^2}\cot\frac{1}{2}\Theta$

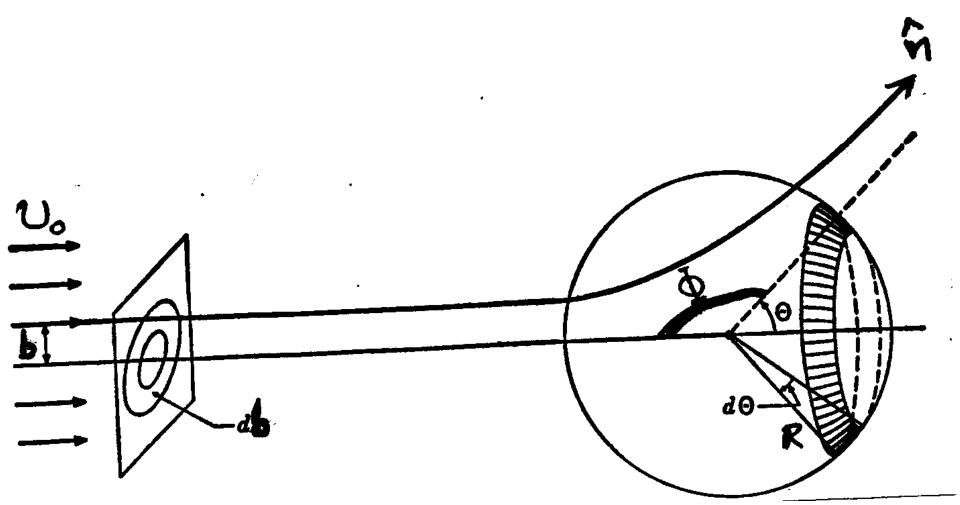
(όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι $E=\frac{1}{2}m\upsilon^2$, $a=\frac{|k|}{m\upsilon^2}$).

4.5 Σκέδαση σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων

Ας θεωρήσουμε τη σκέδαση φορτισμένων σωματίων από ομόσημα φορτισμένα σωμάτια. Έστω, *I,* η ένταση των σωματίων της προσπίπτουσας δέσμης (σωμάτια ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στην δέσμη, ανά μονάδα χρόνου).



Η ενεργός διατομή για σκέδαση στην κατεύθυνση $\hat{n}$, ή η <u>*διαφορική ενεργός διατομή*</u> ορίζεται ως $\frac{d\sigma(\hat{n})}{d\Omega}d\Omega=\frac{d\mathrm{N}}{I}$, όπου dN, ο αριθμός σωματίων που σκεδάζονται σε στερεά γωνία dΩ στην μονάδα του χρόνου, ή $dN=I\frac{d\sigma(\hat{n})}{d\Omega}d\Omega$. Η ενεργός διατομή έχει διαστάσεις επιφάνειας. Για κεντρικά πεδία δυνάμεων, όμως, η διεύθυνση της προσπίπτουσας δέσμης αποτελεί άξονα συμμετρίας. Έτσι, έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Η στερεά γωνία, dΩ, γράφεται

$$d\Omega=\frac{dS}{R^2}=\frac{2\pi R\sin\theta R d\theta}{R^2}=2\pi\sin\Theta d\Theta\,,$$

όπου Θ, είναι η γωνία μεταξύ της προσπίπτουσας και της σκεδαζόμενης δέσμης και λέγεται γωνία σκέδασης.

Τα σωματίδια της προσπίπτουσας δέσμης έχουν στροφορμή, *J*, ανάλογη προς την παράμετρο κρούσης *b*. Έτσι, $J = m\upsilon_o b$. Αλλά,

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^{\ 2} = \mathrm{E} \Rightarrow \upsilon_o = \sqrt{\frac{2\mathrm{E}}{m}} \Rightarrow m\upsilon_o = \sqrt{2mE} \Rightarrow J = b\sqrt{2mE}$$

Για δεδομένες τιμές των *E* και *b,* η γωνία σκέδασης προσδιορίζεται μονοσήμαντα (στην κλασική μηχανική). Έτσι, ο αριθμός των σωματίων που σκεδάζονται στην στερεά γωνία dΩ (δηλ. μεταξύ Θ και $\Theta + d\Theta$) είναι ίσος προς τον αριθμό των σωματίων με παράμετρο κρούσης μεταξύ *b* και *b+db*, δηλαδή, $2\pi Ibdb = -I\dfrac{d\sigma(\hat{n})}{d\Omega}2\pi\sin\Theta \mathrm{d}\Theta$ (το μείον δείχνει ότι αύξηση του db συνεπάγεται μείωση του dΘ). Επομένως,

$$\frac{d\sigma(\hat{n})}{d\Omega} = -\frac{b}{\sin\Theta}\frac{db}{d\Theta}.$$

Είδαμε, ήδη, στην παράγραφο 4.4, ότι

$b = \dfrac{|k|}{m\upsilon^2}\cot\dfrac{1}{2}\Theta$, με $b = \dfrac{|k|}{m\upsilon^2}\cot\dfrac{1}{2}\Theta = \dfrac{k}{2E}\cot\dfrac{\Theta}{2}$, όπου $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}q_1 q_2$ (φορτία ομόσημα).

Συνεπώς, $\dfrac{d\sigma(\hat{n})}{d\Omega} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{k}{2E}\right)^2 \dfrac{1}{\sin^4\dfrac{\Theta}{2}}$,

που είναι η διαφορική ενεργός διατομή Rutherford (σκέδαση σωματίων, α, από πυρήνες ατόμων).

Κβαντομηχανικά, αλλά στο μη σχετικιστικό όριο, η διαφορική ενεργός διατομή είναι ακριβώς η ίδια (αλλά εκεί μιλάμε για πιθανότητα σκέδασης μεταξύ των γωνιών Θ και Θ+*d*Θ).

Αν θεωρήσουμε τώρα σκέδαση προς όλες τις κατευθύνσεις, δηλ. αν ολοκληρώσουμε την διαφορική ενεργό διατομή ως προς όλες τις στερεές γωνίες, παίρνουμε την ολική ενεργό διατομή σκέδασης: σ= $\displaystyle\int_{4\pi}\frac{d\sigma(\hat{n})}{d\Omega}d\Omega = \int_0^{\pi}\frac{d\sigma}{d\Omega}2\pi\sin\Theta d\Theta = \infty$

Αυτό οφείλεται στο ότι το πεδίο Coulomb πέφτει σαν $1/r^2$, και έτσι μικρή σκέδαση παθαίνουν τα σωμάτια ακόμη και αν περάσουν πολύ μακριά από το κέντρο σκέδασης. Ο αριθμός των σωματίων που σκεδάζονται σε οποιαδήποτε γωνία μεγαλύτερη από κάποιο κατώτερο όριο, Θ_o, μπορεί εύκολα να υπολογιστεί. Πρόκειται για τα σωμάτια που έχουν παραμέτρους πρόσκρουσης *b* μικρότερες από $b_o = a\cot\dfrac{\Theta_o}{2}$. Η αντίστοιχη ενεργός διατομή είναι: σ(Θ>Θ_o)=$\pi b_o^2 = \pi a^2\cot^2\dfrac{\Theta}{2}$.

Πεδία που πέφτουν γρηγορότερα από το $1/r^2$, δίνουν πεπερασμένη ολική ενεργό διατομή σκέδασης.