Ενότητα 3: Τρισδιάστατα προβλήματα. Βασικές έννοιες.

Εξίσωση κίνησης: $m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}$

3.1 Διατηρητικά πεδία δυνάμεων

Κινητική ενέργεια: $T=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$

Ρυθμός μεταβολής T: $\dot{T}=\frac{1}{2}m\,d\frac{\vec{v}^2}{dt}=\frac{1}{2}m\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt}=m\frac{\vec{v}\cdot d\vec{v}}{dt}=\vec{v}\cdot(m\frac{d\vec{v}}{dt})=\vec{v}\cdot\vec{F}$ = ισχύς

Το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}=F(r)\hat{r}$ κατά την μετατόπιση $\vec{dr}=\hat{i}\,dx+\hat{j}\,dy+\hat{k}\,dz$, παράγει έργο

$dW=\vec{F}\cdot\vec{dr}=F_x dx+F_y dy+F_z dz$, δηλαδή $dW=dT$ (θεώρημα έργου – ενέργειας).

Κατ' αναλογία προς την 1-D, στις 3-D θα περίμενε κανείς τον ορισμό του διατηρητικού πεδίου δυνάμεων να είναι $\vec{F}=F(r)\hat{r}$.

Αυτό όμως δεν είναι αρκετό για να εξασφαλίσει $T+V=E$ = σταθερά , όπου το T δίνεται παραπάνω και η δυναμική ενέργεια είναι $V=V(\vec{r})$.

Έχουμε: $\dot{V}(\vec{r})=\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial V}{\partial z}\dot{z}=\dot{\vec{r}}\cdot\nabla V$ (όπου η παράγωγος είναι ως προς το χρόνο).

Εφόσον $T+V=E$ = σταθερά, έπεται ότι:

$$\dot{T}+\dot{V}=0\Rightarrow\dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}+\dot{\vec{r}}\cdot\nabla V(\vec{r})=\dot{\vec{r}}\cdot[\vec{F}+\nabla V(\vec{r})]\Rightarrow\vec{F}=-\nabla V(\vec{r}).$$

για διατηρητικό πεδίο δυνάμεων.

Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να ισχύει η παραπάνω σχέση, είναι η:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{0}.$$

3.2 Ροπή-Στροφορμή

Η ροπή ως προς την αρχή των αξόνων μιας δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται σ΄ ένα σωμάτιο στη θέση $\vec{r}$ ορίζεται ως: $\vec{G}=\vec{r}\times\vec{F}$.

Οι συνιστώσες του διανύσματος της ροπής είναι οι ροπές περί τους άξονες x, y, z :

$G_x = yF_z - zF_y$

$G_y = zF_x - xF_z$

$G_z = xF_y - yF_x$

Η διεύθυνση του $\vec{G}$ ορίζει τον άξονα γύρω από τον οποίο η δύναμη τείνει να περιστρέψει το σωμάτιο. Το μέγεθος του είναι $G = rF\sin\theta$, όπου *θ,* η γωνία μεταξύ των $\vec{r}$ και $\vec{F}$.
Αντίστοιχα ορίζουμε το διάνυσμα ***στροφορμής*** ως προς την αρχή των αξόνων σωματίου στη θέση $\vec{r}$ που κινείται με ορμή $\vec{p}$ ως: $\vec{J}=\vec{r}\times\vec{p}=m\,\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$.

Οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{J}$ είναι οι στροφορμές ως προς τους άξονες *x, y, z*:

$$J_x=m(y\,\dot{z}-z\,\dot{y}),\,J_y=m(z\,\dot{x}-x\,\dot{z}),\,J_z=M(x\,\dot{y}-y\,\dot{x})$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής $\vec{J}$ είναι:

$$\dot{\vec{J}}=m\,d\frac{\vec{r}\times\dot{\vec{r}}}{dt}=m(\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}})+\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}\Rightarrow\dot{\vec{J}}=\vec{G},$$ (κατ΄ αναλογία του $\dot{\vec{p}}=\vec{F}$).

3.3 Μη καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων

- 2-D Πολικές σφαιρικές συντεταγμένες (r,ϑ)

$$\hat{r}=\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j}$$
$$\hat{\theta}=-\sin\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{j}$$

Βοηθητικές σχέσεις: $\dot{\hat{r}}=\dot{\theta}\cdot\hat{\theta},\,\dot{\hat{\theta}}=-\dot{\theta}\,\hat{r}.$

Συνεπώς: $\dot{\vec{r}}=d\dfrac{(r\,\hat{r})}{dt}=\dot{r}\,\hat{\theta}+r\,\dot{\theta}\hat{\theta},$ δηλαδή: $\upsilon_r=\dot{r},\,\upsilon_\theta=r\,\dot{\theta}.$
Με το ίδιο σκεπτικό: $a_r=(\ddot{r}-r\,\dot{\theta}^2),\,a_\theta=(r\,\ddot{\theta}+2\,\dot{r}\,\dot{\theta}).$

- 3-D Πολικές κυλινδρικές συντεταγμένες (*ρ,φ.z*): $x=\rho\,cos\varphi,\,y=\rho\,sin\varphi,\,z=z$

$\upsilon_\rho=\dot{\rho},\,\upsilon_\varphi=\rho\,\dot{\varphi},\,\upsilon_z=\dot{z},$ και,

$a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\,\dot{\varphi}^{2,}\,a_\varphi=2\dot{\rho}\,\dot{\varphi}+\rho\,\ddot{\varphi},\,a_z=\ddot{z}.$

Κινητική ενέργεια: $T=\dfrac{1}{2}m(\upsilon_\rho^2+\upsilon_\varphi^2+\upsilon_z^2)=\dfrac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\,\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)$

- 3-D Πολικές σφαιρικές συντεταγμένες (*r,θ,φ*):
  $x=r\,sin\theta cos\varphi,\,y=r\,sin\theta sin\varphi,\,z=r\,cos\theta.$

Ισχύει: $\upsilon_r=\dot{r},\,\upsilon_\theta=r\,\dot{\theta},\,\upsilon_\varphi=r\sin\theta\dot{\varphi},$

Κινητική ενέργεια: $T = \frac{1}{2} m \left(\upsilon_r^2 + \upsilon_\theta^2 + \upsilon_\varphi^2 \right) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \, \dot{\varphi}^2 \right)$

Βαθμίδα πεδίου: $\nabla f = \hat{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{(r sin\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$.