## 2.1 Κίνηση κοντά σε ισορροπία – Αρμονικός ταλαντωτής

Έστω διατηρητική δύναμη, *F(x)*. Ισορροπία: $F(x) = -\dfrac{dV(x)}{dx} \equiv -V'(x) = 0$

Για μικρές μετατοπίσεις από την θέση ισορροπίας:

$$V(x) = V(0) + xV'(0) + \frac{1}{2}x^2V''(0) + ...$$

Έστω ότι: $V(0) = 0$ (επιλογή σταθεράς), και $V'(0) = 0$ (ισορροπία),

$\therefore V(x) \cong \dfrac{1}{2}kx^2, k = V''(0)$ .

Άρα, κοντά στη θέση ισορροπίας, *F(x)=-kx*, ανεξάρτητα από τη μορφή της *F(x),*

$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$ : εξίσωση κίνησης (2.1.1)

$\rightarrow$ γραμμική διαφορική εξίσωση $\rightarrow$ αρχή επαλληλίας λύσεων.

<u>*1η περίπτωση*</u>: $k < 0$ (οπότε το $V$ έχει μέγιστο στο $x = 0$ )

(2.1.1)$\Rightarrow \ddot{x} - p^2x = 0$ , $p = (-k/m)^{1/2}$
Λύσεις: $x = e^{pt}, x = e^{-pt}$
Γενική λύση: $x = Ae^{pt} + Be^{-pt} \rightarrow x(t) \uparrow$ Ασταθής ισορροπία.

<u>*2η περίπτωση*</u>: $k > 0$ (οπότε το $V$ έχει ελάχιστο στο $x = 0$ )

(2.1.1)$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_o{}^2x = 0$ , $\omega_o = (k/m)^{1/2}$
Λύσεις: $x = a\cos(\omega_o t - \theta)$ , "απλός αρμονικός ταλαντωτής". Οι σταθερές *α* και *θ* καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες: $x(t=0) = x_o, \dot{x}(t=0) = \upsilon_o$ .
Η σταθερά *α* ονομάζεται πλάτος, ενώ *ω*$_o$*/2π=ν* είναι ο αριθμός των ταλαντώσεων στην μονάδα του χρόνου (συχνότητα).

*Μιγαδική αναπαράσταση της γενικής λύσης της (2.1.1)*
Για κ>0, το $p = (-k/m)^{1/2}$ είναι φανταστικό, δηλ. $p = i\omega_o$ .
Η γενική λύση (αντίστοιχα με την περίπτωση για *p*>0) είναι:

$$x = A\,e^{i\omega t} + B\,e^{-i\omega t}$$

με $A = \dfrac{a}{2}e^{-i\theta}$ και $B = \dfrac{a}{2}e^{i\theta}$ .

*Ενέργεια*: Κινητική $\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 = \dfrac{1}{2}ma^2\omega_o{}^2\sin^2(\omega_o t - \theta)$

Δυναμική: $V \equiv -\int_0^x F(x)dx = \int_0^x m\omega_o{}^2 x dx = \frac{ma^2\omega_o{}^2}{2}\cos^2(\omega_o t - \theta)$

*(V(0)=0)*

$\therefore T + V = \frac{1}{2}ma^2\omega_o{}^2$ = ολική ενέργεια (*a* είναι το πλάτος της ταλάντωσης).

**2.2 Αποσβυνόμενος ταλαντωτής**

$F = m\ddot{x} = -kx - a\dot{x}$

Εξίσωση κίνησης: $m\ddot{x} + a\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \omega_0^2 = 0.$

Αναζητούμε λύση της μορφής $x = e^{pt}$.

$e^{pt}(p^2 + \frac{a}{m}p + \omega_0^2) = 0 \Rightarrow p = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2},$ όπου $\gamma$ είναι ο "συντελεστής απόσβεσης"

που ορίζεται ως: $\gamma = \frac{a}{2m}$ .

Άρα,

$x(t) = e^{-\gamma t}(A e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t}).$

<u>*Περίπτωση 1:*</u> $\omega_0^2 > \gamma^2$ , ***Μικρή απόσβεση.***

$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ , $\omega < \omega_0$ και $T > T_0$. Σ' αυτή την περίπτωση:

$x(t) = ae^{-\gamma t}\cos(\omega t - \theta).$

Χρόνος εφησυχασμού του ταλαντωτή: $t_{\varepsilon\varphi} = \frac{1}{\gamma}$

Συντελεστής ποιότητας: $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \pi\frac{t_{\varepsilon\varphi}}{T_0}.$

Μικρή απόσβεση $\rightarrow$ μεγάλο *Q.*

Σε μία περίοδο ταλάντωσης, το πλάτος μειώνεται κατά: ~ $e^{-\pi/Q}$

Αριθμός περιόδων στην διάρκεια του χρόνου εφησυχασμού: ~ $\frac{Q}{\pi}$

<u>*Περίπτωση 2:*</u> $\omega_0^2 = \gamma^2$ , ***Κρίσιμη απόσβεση.***

Το σύστημα δεν ταλαντώνεται αλλά πλησιάζει μονότονα στην κατάσταση ισορροπίας.

Γενική λύση: $x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}.$

<u>*Περίπτωση 3*</u>: $\omega_0^2 < \gamma^2$ , ***Μεγάλη απόσβεση.***

$$x(t) = A\,e^{-[\gamma-(\gamma^2-\omega_0^2)^{1/2}]t} + B\,e^{-[\gamma+(\gamma^2-\omega_0^2)^{1/2}]t}.$$

Χρόνος εφησυχασμού: $t_{\varepsilon\varphi} = \dfrac{1}{\gamma-(\gamma^2-\omega_0^2)^{1/2}}.$

**2.3 Ταλαντωτής με αρμονική δύναμη.**

Εξωτερική δύναμη *F(t).*

Η εξίσωση κίνησης γίνεται: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{F(t)}{m}.$ (2.3.1)

Γενική λύση: $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$, όπου $x_g(t)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και $x_p(t)$ μια μερική λύση της (2.3.1).

<u>*Απλή περιοδική δύναμη – Συντονισμός*</u>

$F(t) = f_0\cos(\omega t),$ οπότε $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0\cos(\omega t), F_0 = \dfrac{f_0}{m}.$

Μερική λύση της μη ομογενούς:

$x(t) = a\cos(\omega t - \theta),$ όπου *ω* η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης, και:

$$a = \frac{F_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}},\ tan\theta = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}.$$

Περιοδική κίνηση που έχει περίοδο ίση με εκείνη της επιδρώσας δύναμης.
Γενική λύση (για την περίπτωση που η απόσβεση είναι μικρότερη από την κρίσιμη):

$$x(t) = \frac{F_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}\cos(\omega t - \theta) + A\,e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \delta),$$

όπου: $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$ και τα *A* και *δ* καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

Ο δεύτερος όρος αποσβύνεται και λέγεται <u>*παροδικός*</u> *όρος*. Τελικά, σε βάθος χρόνου, η κίνηση καθορίζεται από την εξωτερική δύναμη.

Συντονισμός:

1. Κρατάμε το $\omega$ σταθερό και μεταβάλλουμε το $\omega_o$. Τότε έχουμε συντονισμό για $\omega=\omega_o$, οπότε και το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται $F_0/(2\gamma\omega)$, που $\to\infty$ για μικρά $\gamma$.

2. Κρατάμε το $\omega_o$ σταθερό και μεταβάλλουμε το $\omega$. Τότε έχουμε συντονισμό για $\omega^2=\omega_o^{\,2}-2\gamma^2$, με μέγιστο πλάτος:
$\dfrac{F_0}{2\gamma\sqrt{\gamma^2+\omega^2}}$ , που και πάλι $\to\infty$ για μικρά γ.

## 2.4 Ταλαντωτής με (τυχαία) περιοδική δύναμη.

Κάθε συνεχής ή τμηματικά συνεχής περιοδική συνάρτηση $F(t+T_o)=F(t)$, μπορεί να γραφεί ως:

$$F(t)=\sum_n F_n e^{i\omega_n t},$$ όπου:

$\omega_n=n\omega=n(2\pi/T)$, $\quad n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

και:

$$F_n=\frac{1}{T}\int_0^T F(t)e^{-in\omega t}\,dt.$$

Λόγω της επαλληλίας των λύσεων, η λύση της εξίσωσης κίνησης:

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=F(t),$$

μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα των λύσεων $x_n(t)$ της εξίσωσης,

$$\ddot{x}_n+2\gamma\dot{x}_n+\omega_0^2 x_n=F_n(t),$$

,

δηλ. $x(t)=\sum_n x_n(t)$, $\quad n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

(στην λύση αυτή, που είναι μία μερική λύση, πρέπει να προστεθεί και η λύση της ομογενούς που αποτελεί τον λεγόμενο παροδικό όρο).