

Ενότητα 1: Γραμμική κίνηση

Γενικά, $F=F(x,u,t)$.

1.1 Πεδίο δυνάμεων εξαρτώμενο μόνο από τον χρόνο

$$F = F(t)\hat{x}$$

$$m\ddot{x} = F(t) \Rightarrow v = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t') dt' + v_0 \Rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt'' \int_{t_0}^{t''} F(t') dt'$$

Εφαρμογή: Μονοδιάστατη κίνηση ηλεκτρονίου σε ηλεκτρικό πεδίο

$$E_x = E_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\Rightarrow F = -eE_x$$

$$\therefore x = -\frac{eE_0 \cos \varphi}{m\omega^2} + \frac{eE_0 \sin \varphi}{m\omega} t + \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

1.2 Πεδίο δυνάμεων εξαρτώμενο μόνο από την ταχύτητα

Π.χ. Ιξώδης αντίσταση που εφαρμόζεται πάνω σε ένα σωματίο που κινείται μέσα σε ρευστό (υγρό ή αέριο).

$$F(v) = m \frac{dv}{dt} = -bv \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{-b dt}{m} \Rightarrow v = v_0 e^{\frac{-bt}{m}}.$$

Αφού $u = dx/dt$, έπεται ότι:

$$dx = v_0 e^{\frac{-bt}{m}} dt \Rightarrow x(t) = \frac{m v_0}{b} (1 - e^{\frac{-bt}{m}}) + x_0.$$

Ή, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $x(t)$ απευθείας:

$$F(v) = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = m v \frac{dv}{dx} \Rightarrow dx = \frac{m v dv}{F(v)} \Rightarrow \dots$$

Εφαρμογή: Οριζόντια κίνηση πάνω σε επίπεδο χωρίς τριβή, αλλά λαβαίνοντας υπόψη την αντίσταση του αέρα.

1.3 Πεδίο δυνάμεων εξαρτώμενο μόνο από τη θέση - Διατηρητικά πεδία δυνάμεων

Π.χ. Ηλεκτροστατικές και βαρυτικές δυνάμεις, δυνάμεις τάσης και συμπίεσης.

$$F = F(x)$$

$$m\ddot{x} = F(x) \Rightarrow \dot{x}m\dot{x} = \dot{x}F(x) \Rightarrow \int_{t_0}^t m\dot{x}\dot{x}dt = \int_{t_0}^t F(x)\dot{x}dt \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \int_{x_0}^x F(x)dx = \frac{1}{2}mv_0^2 = E = \text{σταθ.}$$

$$\Rightarrow T + V = E = \text{σταθ.},$$

$$\text{όπου } T \equiv \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \text{ και } V \equiv -\int_{x_0}^x F(x)dx \Leftrightarrow F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

Νόμος διατήρησης της ενέργειας \implies **Διατηρητικές δυνάμεις**

Αφού $T \geq 0$, προφανώς $V(x) \leq E$

Το E καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

Από το E και το $V(x)$

$$\Rightarrow v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]} \Rightarrow \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = dt \Rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{m}dx}{\pm \sqrt{2[E - V(x)]}} \Rightarrow x = x(t)$$

Παράδειγμα 1: Πηγάδι δυναμικού

Παράδειγμα 2: Φράγμα δυναμικού