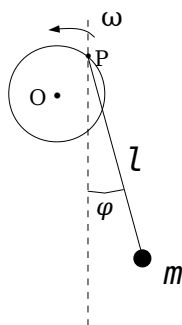


ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΜ-Ι ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

1ο Θέμα: α) Θεωρείστε κύβο μάζας M και ακμής a . Δείξτε ότι η ροπή αδράνειας του ως προς άξονα που ταυτίζεται με μία από τις ακμές του είναι ίση με $I = \frac{2}{3}Ma^2$. **(1).** **β)** Έστω ένας τέτοιος κύβος που είναι τοποθετημένος σ' ένα τραπέζι με τη μια του ακμή. Προφανώς αυτή είναι μία κατάσταση ασταθούς ισορροπίας. Οπότε, ενώ αρχικά ο κύβος είναι ακίνητος, λόγω ενός μικρού σπρωξίματος, στρέφεται γύρω από την ακμή που ακουμπά στο τραπέζι και πέφτει πάνω σ' αυτό. Βρείτε τη γωνιακή του ταχύτητα λίγο πριν ακουμπήσει στο τραπέζι. (Υποθέστε ότι, λόγω τριβής, η ακμή γύρω από την οποία στρέφεται ο κύβος παραμένει στη θέση της όση ώρα ο κύβος πέφτει). **(1.5).**

2ο Θέμα:



Θεωρείστε το εκκρεμές του σχήματος, μάζας m και μήκους l . Το πάνω άκρο του εκκρεμούς (P) είναι προσαρμοσμένο στο άκρο ενός τροχού (κέντρου O , ακτίνας R) που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Τη χρονική στιγμή $t=0$, το σημείο P βρίσκεται στο ίδιο ύψος με το κέντρο του τροχού O . **α)** Δείξτε ότι η θέση του σώματος μάζας m μπορεί να καθοριστεί μόνο από μία γενικευμένη συνταταγμένη, τη γωνία φ **(0.5)** **β)** Βρείτε τη Λαγκραζιανή του σώματος **(1.0)** και **γ)** την εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς **(1.0)**.

Δίνονται: $\sin(\varphi)\cos(\omega t) - \cos(\varphi)\sin(\omega t) = \sin(\varphi - \omega t)$ και $d[f(x,y)]/dt = (\partial f/\partial x)(dx/dt) + (\partial f/\partial y)(dy/dt)$.

3ο Θέμα: Σωμάτιο μάζας m βρίσκεται εντός δυναμικού $V=kr$, $k>0$. Σχεδιάστε την ενεργό δυναμική του ενέργεια **(0.5)**. Θεωρείστε το μέτρο της στροφορμής του, J , δεδομένο. Για ποιά τιμή της ενέργειας η τροχιά του είναι κυκλική **(1)**; Να βρείτε την ακτίνα της τροχιάς και τη γωνιακή ταχύτητά του σώματος σε αυτή την περίπτωση **(1.0)**.

4ο Θέμα: Θεωρείστε παρατηρητή στην επιφάνεια της Γης ο οποίος παρατηρεί ένα τρένο που ξεκινάει από την Αθήνα και κατευθύνεται προς τη Θεσσαλονίκη. Στο τρένο υπάρχει ένα βαρίδι μάζας m που κρέμεται από το ταβάνι με λεπτό σκοινί. Το τρένο (και επομένως και το βαρίδι) κινείται με σταθερή ταχύτητα 100 μέτρων το δευτερόλεπτο. Μπορείτε να θεωρήσετε ότι η κύρια συνιστώσα της ταχύτητας του τρένου είναι προς Βορρά. Θεωρήσετε και σύστημα αναφοράς $Oxyz$ που συνδέεται μ' αυτόν τον παρατηρητή, με άξονα Oz τον κατακόρυφο άξονα, άξονα Oy την ευθεία Βορράς-Νότος (με θετική κατεύθυνση την κατεύθυνση προς το Βορρά), και άξονα Ox την ευθεία Ανατολή-Δύση (με θετική κατεύθυνση την κατεύθυνση προς Ανατολή). **α)** Να δείξετε ότι το σκοινί θα αποκλίνει από τον άξονα Oz προς την Ανατολή **(1.0)** και **β)** να βρείτε τη γωνία (σε μοίρες) που σχηματίζει το σκοινί με τον άξονα Oz **(1.5)**. Το γεωγραφικό πλάτος της Αθήνας (και, κατά προσέγγιση, οποιαδήποτε σημείου από Αθήνα μέχρι τη Θεσσαλονίκη) είναι $\lambda=38^\circ$ (αγνοήσετε όλους του φυγοκεντρικούς όρους της μορφής $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$ και $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$).