ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΜ-Ι ΙΟΥΝΙΟΥ 2011 **Α+Β**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: Γράψτε υποχρεωτικά στο γραπτό σας την κατηγορία θεμάτων (Α ή Β). Δεν επιτρέπεται να βγείτε εκτός αμφιθεάτρου τις πρώτες 2 ώρες της εξέτασης εκτός αν θέλετε να παραδώσετε το γραπτό σας. Τα θέματα θα τα παραδώσετε μαζί με το γραπτό σας (θα αναρτηθούν στο διαδίκτυο σε λίγες μέρες). Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. Όταν παραδώσετε το γραπτό σας πρέπει να δείξετε και την ταυτότητά σας. **ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ ΤΗΝ ΕΚΦΩΝΗΣΗ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ.** ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ, Ι. ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ.

1ο Θέμα: **α)** Δείξτε ότι η ροπή αδράνειας ενός ομογενούς κυκλικού δακτύλιου αμελητέου πάχους, μάζας M και ακτίνας a, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του δακτυλίου, είναι ίση με $I=Ma^2$ (**0.5**). **β)** Έστω ένας τέτοιος δακτύλιος που κυλίεται (δηλαδή περιστρέφεται συνεχώς χωρίς να ολισθαίνει) σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο (το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου δεν είναι γνωστό). Χρησιμοποιήστε φορμαλισμό Lagrange (υποχρεωτικά) για να δείξετε ότι η γραμμική επιτάχυνση του δακτυλίου είναι ίση με $(g\sin\varphi)/2$ (**1.5**). **γ)** Έστω τώρα ότι δίπλα σ' αυτό το δακτύλιο υπάρχει ένα κουτί ίδιας μάζας το οποίο και αυτό κινείται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Το κουτί απλά ολισθαίνει, με αμελητέα τριβή. 'Εστω ότι τα δύο σώματα ξεκίνησαν την κίνηση τους την ιδια στιγμή, από το ίδιο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου και με μηδενική αρχική ταχύτητα. Ποιο θα φτάσει πρώτο στο έδαφος (**0.5**);

2ο Θέμα: Ας υποθέσουμε ότι στη θέση της Γης υπήρχε ένα άλλο αστέρι μάζας ίσης με τη μάζα του Ήλιου (M_0). Θεωρείστε ότι το σύστημα των δύο αστέρων είναι απομονωμένο. Έστω ότι η ενέργεια του διπλού αυτού συστήματος αστέρων είναι $E_{2αστέρων}<0$, όπως δηλαδή και στην περίπτωση του συστήματος Γης-Ήλιου, και μάλιστα $|E_{2αστέρων}|=|E_{Γης\text{-}Ήλιου}|(M_0/M_{Γης})$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις και ιδέες που συζητήσαμε για την περίπτωση της μελέτης κίνησης δύο σωμάτων δείξτε ότι: **α)** το κάθε αστέρι θα κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από το κέντρο μάζας του συστήματος, με τον κύριο ημιάξονα ίσο με το μισό της απόστασης Γης-Ήλιου **(1.5)** **β)** Υποθέστε ότι η εκκεντρότητα της τροχιάς των αστέρων είναι πολυ μικρότερη του 1. Υπάρχει ποτέ περίπτωση τα δύο αστέρια να συγκρουστούν; **(1.0)** Δίνονται: $a=|k|/2|E|$, για την έλλειψη: $r_{min}=a(1-e)$, 1AU=1.5×10^{13} cm, ακτίνα Ήλιου=1.4×10^{11} cm.

3ο Θέμα: Έστω ομογενής ράβδος ΟΑ μήκους $2a$ και μάζας M που μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από σταθερό σημείο Ο. Αρχικά, η ράβδος ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση (με το άκρο Α πάνω από το Ο). Μετακινούμε τη ράβδο ελάχιστα από τη θέση ισορροπίας και η ράβδος πέφτει. **α)** Δείξτε ότι η γωνιακή ταχύτητα, ω, με την οποία η ράβδος στρέφεται γύρω από το (σταθερό) σημείο Ο δίνεται από τη σχέση: $\omega^2=(3g/2a)(1-\sin\theta)$, όπου θ είναι η γωνία μεταξύ της ράβδου και του οριζόντιου άξονα Ox **(1)**. **β)** Έστω $\vec{Q}$ η δύναμη που ασκεί ο άξονας περιστροφής που περνάει από το σημείο Ο στη ράβδο. Θεωρείστε πολικές συντεταγμένες r και θ, και δείξτε ότι:
$Q_\theta=(1/4)Mg\cos\theta$,
$Q_r=(5/2)Mg\sin\theta-(3/2)Mg$.
Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το Ο είναι: $I=(4/3)Ma^2$ **(1.5).**

4ο Θέμα: 'Εστω παρατηρητής στο Βόρειο ημισφαίριο της Γης σε σημείο με γεωγραφικό πλάτος λ. Ο παρατηρητής αυτός φυσικά περιστρέφεται μαζί με τη Γη, η οποία περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω (είναι λοιπόν μη-αδρανειακός παρατηρητής). Στις διαλέξεις του μαθήματος μελετήσαμε την ελεύθερη πτώση ενός σώματος ως προς ένα τέτοιον παρατρηρητή. Εδώ σας ζητάω να μελετήσετε την ίδια κίνηση αλλά με αρχική ταχύτητα υ_0. Δηλαδή: έστω σωμα μάζας m που ρίχνεται προς τα κάτω από ένα ύψος h και με αρχική ταχύητα υ_0. Δείξτε ότι το σώμα θα φτάσει στην επιφάνεια της γης σ' ένα σημείο το οποίο θα αποκλίνει από την κατακόρυφο προς τα ανατολικά κατά μία απόσταση: $x=\frac{\omega\cos\lambda}{3g^2}\left(\sqrt{\upsilon_0^2+2gh}-\upsilon_0\right)^2\left(\sqrt{\upsilon_0^2+2gh}+2\upsilon_0\right)$ **(2.5)**.

<u>5ο Θέμα:</u> Ένα ομοιογενές ραβδί μήκους 2*α* και μάζας Μ είναι τοποθετημένο στην άκρη ενός ακίνητου τραπεζιού με συντελεστή στατικής τριβής μ. Αρχικά κρατάμε το ραβδί οριζόντιο μ' ένα τμήμα του, μήκους $l(l>\alpha)$, να εξέχει από το τραπέζι. Αφήνουμε το ραβδί ελεύθερο, οπότε αυτό αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από την άκρη του τραπεζιού. **α)** Δείξτε ότι η γωνιακή ταχύτητα, ω, με την οποία αρχικά περιστρέφεται το ραβδί δίνεται από τη σχέση: $\omega^2= 2\mathrm{Mg}\frac{(l-a)}{I}(1-cos\theta)$ (όπου θ είναι η γωνία μεταξύ του οριζόντιου άξονα που ταυτίζεται με το ραβδί στην αρχή της κίνησης και του ραβδιού καθώς στρέφεται) **(1)**. **β)** Αποδείξτε ότι το ραβδί θα αρχίσει να γλιστρά από το τραπέζι αφού θα έχει στραφεί κατά γωνία $\tan^{-1}[\mu\frac{[I-M(l-a)^2]}{I}]$ (και στα δύο ερωτήματα I είναι η ροπή αδρανείας του ραβδιού ώς προς άξονα που διέρχεται από την άκρη του τραπεζιού γύρω από την οποία αρχικά στρέφεται και δεν χρειάζεται να την υπολογείσετε) (**1.5**).