

Κλασική Μηχανική Εξέταση Ιούνιος 2019

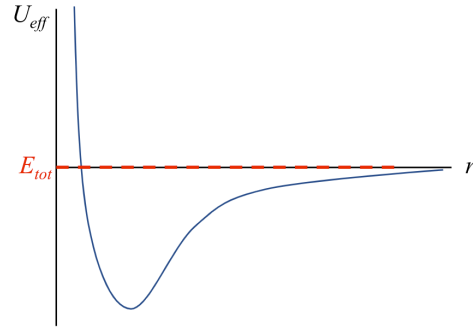
ΟΔΗΓΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: Η διάρκεια της εξέτασης είναι **2.5 ώρες**. Τα θέματα θα τα παραδώσετε μαζί με το γραπτό σας. Όταν παραδώσετε το γραπτό σας πρέπει να δείξετε και την ταυτότητά σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1^ο (3 μονάδες):

α) [0.5] Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές όσον αφορά την κίνηση σώματος ολικής μηχανικής ενέργειας E_{tot} σε πεδίο κεντρικής δύναμης (αντιστρόφου τετραγώνου) του οποίου η ενεργός δυναμική ενέργεια φαίνεται στο σχήμα;

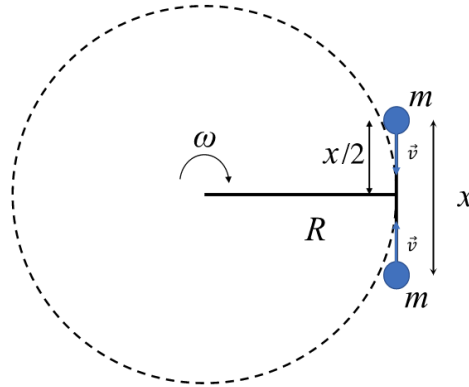
- Το σώμα έχει παντού ταχύτητα ίση με την ταχύτητα διαφυγής.
- Το σώμα έχει παραβολική τροχιά.
- Η εκκεντρότητα της τροχιάς του σώματος είναι $e=1$.
- Το σώμα έχει στροφορμή μηδέν.
- Το σώμα βρίσκεται σε πεδίο απωστικής κεντρικής δύναμης.



β) [0.5]

A. Δύο σώματα ίσης μάζας ($m=1\text{kg}$ το καθένα) κινούνται κατά μήκος αβαρούς ράβδου μήκους x πλησιάζοντας το ένα το άλλο με ίσες και αντίθετες ταχύτητες. Το μέσο της ράβδου αυτής είναι ενωμένο με μια δεύτερη αβαρή ράβδο μήκους $R=1\text{m}$ η οποία περιστρέφεται γύρω από το άλλο άκρο της με γωνιακή ταχύτητα $\omega=0.5\text{ s}^{-1}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πόση είναι η στροφορμή του συστήματος των δύο σωμάτων ως προς το κέντρο του διακεκομμένου κύκλου;

B. Προς τα πού δείχνει το διάνυσμα της στροφορμής του προηγούμενου προβλήματος;



γ) [0.5] Η τροχιά σώματος που δέχεται κεντρική δύναμη είναι κυκλική. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

- Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς αντιστοιχεί σε ακρότατο της ενεργού δυναμικής ενέργειας.
- Η στροφορμή του σώματος έχει κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς.
- Το επίπεδο της τροχιάς είναι σταθερό.
- Η κυκλική τροχιά είναι ευσταθής σε διαταραχές αν η ενέργεια του σώματος είναι ίση με την ελάχιστη τιμή της ενεργού δυναμικής ενέργειας.

δ) [0.5] Διαστημόπλοιο ρυμουλκεί ένα χαλασμένο δορυφόρο μάζας 950 kg στο άδειο διάστημα μακριά από άλλα σώματα. Το διαστημόπλοιο και ο δορυφόρος είναι ενωμένα με ένα ομογενές σχοινί μήκους 50 m και γραμμικής πυκνότητας 1kg/m . Το διαστημόπλοιο επιταχύνεται 5 m/sec^2 σε ευθεία γραμμή. Πόση είναι η δύναμη που ασκεί το διαστημόπλοιο στο σχοινί;

ε) [0.5] Δυο ομογενείς δίσκοι ίδιας μάζας M και ίδιου πάχους d έχουν διαφορετικές πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 . Όπου $\rho_1 < \rho_2$. Ποιος δίσκος έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας;

ζ) [0.5] Τον Οκτώβριο του 2012 ο Felix Baumgartner πήδηξε (με μηδενική αρχική ταχύτητα) από ύψος 24 μιλίων πάνω από την επιφάνεια της Γης, σε τοποθεσία με γεωγραφικό πλάτος περίπου $+45^\circ$. Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα. Προς ποια κατεύθυνση ήταν η απόκλιση, λόγω της δύναμης Coriolis, του σημείου πτώσης του στο έδαφος από αυτό ακριβώς στην κατακόρυφο;

Θέμα 2° (4 μονάδες):

Υλικό σημείο μάζας m κινείται εντός πεδίου διατηρητικής δύναμης με δυναμικό:

$$V(x) = cx/(x^2 + a^2), \quad \text{όπου } c \text{ και } a \text{ θετικές σταθερές.}$$

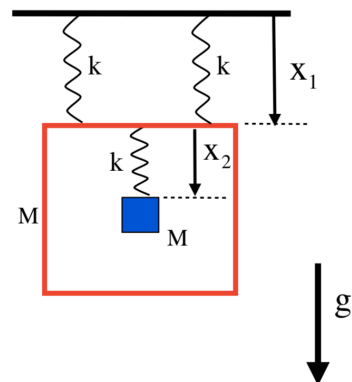
α) Βρείτε το σημείο ευσταθούς ισορροπίας και την περίοδο μικρών ταλαντώσεων γύρω από αυτό. (2)

β) Αν το υλικό σημείο ξεκινά από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας με ταχύτητα v πόσο πρέπει να είναι η ταχύτητα αυτή ώστε το σώμα να διαφύγει στο $-\infty$; (1)

γ) Αν το υλικό σημείο ξεκινά από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας με ταχύτητα v πόσο πρέπει να είναι η ταχύτητα αυτή ώστε το σώμα να διαφύγει στο $+\infty$; (1)

Θέμα 3° (3 μονάδες):

Ένα κουτί μάζας M κρέμεται από την οροφή δωματίου κατακόρυφα από δυο ίδια παράλληλα ελατήρια σταθεράς k . Μέσα στο κουτί υπάρχει ένα ακόμα ελατήριο ίδιας σταθεράς (k) που κρέμεται από την οροφή του κουτιού και στο άλλο άκρο του φέρει βαρίδι μάζας M . Η απόσταση του κουτιού από την οροφή του δωματίου είναι x_1 και η απόσταση του βαριδιού μέσα στο κουτί από την οροφή του κουτιού είναι x_2 όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σταθερά της βαρύτητας είναι g .



α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας των ελατηρίων x_1^{eq} x_2^{eq} . (1)

β) Αν Ψ_1 και Ψ_2 είναι οι μετατοπίσεις από τα σημεία ισορροπίας των ελατηρίων ώστε $x_1 = x_1^{eq} + \Psi_1$ και $x_2 = x_2^{eq} + \Psi_2$, βρείτε την Λαγκραντζιανή του συστήματος με γενικευμένες συντεταγμένες τα Ψ_1 και Ψ_2 και τις εξισώσεις κίνησης. (2)