

Κλασική Μηχανική Εξέταση Ιούνιος 2017

ΟΔΗΓΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: Η διάρκεια της εξέτασης είναι **3 ώρες**. Τα θέματα θα τα παραδώσετε μαζί με το γραπτό σας. Όταν παραδώσετε το γραπτό σας πρέπει να δείξετε και την ταυτότητά σας.
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1° (2.5 μονάδες):

α) [0.5] Σώμα που κινείται ελεύθερα με σταθερή ταχύτητα $v=v_0$ κατά μήκος του άξονα x την χρονική στιγμή $t=0$ εισέρχεται σε υγρό. Το υγρό ασκεί στο σώμα δύναμη αντίστασης (λόγω ιξώδους) που δίνεται από την σχέση $\vec{F} = -b\vec{v}$. Ποια σχέση δίνει την ταχύτητα του σώματος συναρτήσει του χρόνου;

- i) $v(t) = v_0 e^{-bmt}$
- ii) $v(t) = v_0 e^{bt/m}$
- iii) $v(t) = v_0 e^{-bt/m}$
- iv) $v(t) = v_0 e^{mt/b}$

β) [0.5] Είναι η παρακάτω δύναμη διατηρητική; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

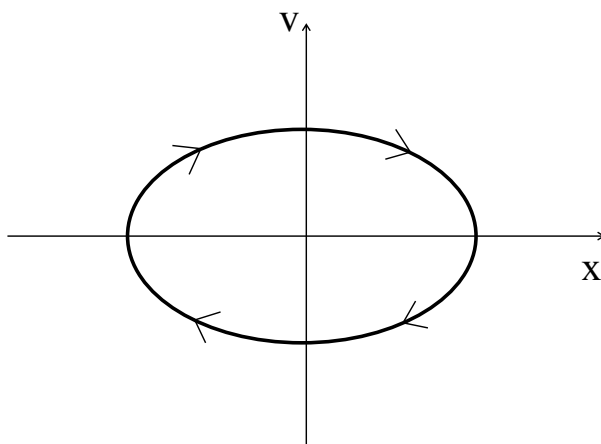
$$\vec{F} = (y^2 z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3\hat{j} + (3xy^2 z^2 - 6x^2 z)\hat{k}$$

γ) [0.5] Η σίτα της πόρτας στην βεράντα είναι συνδεδεμένη με ένα ελατήριο και όταν ανοίγει, κλείνει μόνη της με την βοήθεια του ελατηρίου. Τι είδους απόσβεση θέλουμε να έχει το ελατήριο για να κλείνει την σίτα όσο γίνεται πιο γρήγορα και να ελαχιστοποιείται ο χρόνος που οι μύγες μπορούν να μπουν στο σπίτι;

- i) Υπερκρίσιμη απόσβεση
- ii) Κρίσιμη απόσβεση
- iii) Υποκρίσιμη απόσβεση.

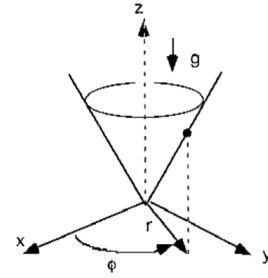
δ) [0.5] Πόσες φορές μεγαλύτερη της μέσης ακτίνας της τροχιάς της Γης είναι η μέση ακτίνα της τροχιάς ενός αστεροειδή που έχει περίοδο περιφοράς γύρω από τον Ήλιο 8 χρόνια; Γιατί;

ε) [0.5] Το διάγραμμα φάσης ενός αρμονικού ταλαντωτή φαίνεται παρακάτω. Πως θα αλλάξει το διάγραμμα φάσης αν ο ίδιος ταλαντωτής ξεκινήσει με μεγαλύτερη αρχική απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας;



Θέμα 2° (2.5 μονάδες):

Σώμα μάζας m είναι περιορισμένο να κινείται σε λεία επιφάνεια κώνου εκ περιστροφής $z = ar$, όπου a θετική σταθερά.



α) Να γράψετε την Λαγκραντζιανή συναρτήσεϊ των κυλινδρικών συντεταγμένων (r, φ) και να βρείτε τις διατηρήσιμες ποσότητες. (1)

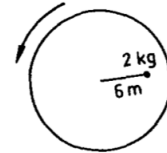
β) Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης. (0.5)

γ) Μπορεί το σώμα να κάνει κυκλική τροχιά γύρω από τον άξονα z ; Αν ναι υπολογίστε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς r_0 συναρτήσεϊ των g, a και της κυκλικής συχνότητας ω . (0.5)

δ) Ποια η συχνότητα των μικρών ακτινικών ταλαντώσεων αν διαταράξουμε ελαφρά την κυκλική τροχιά του σώματος; (0.5)

Θέμα 3° (2.5 μονάδες):

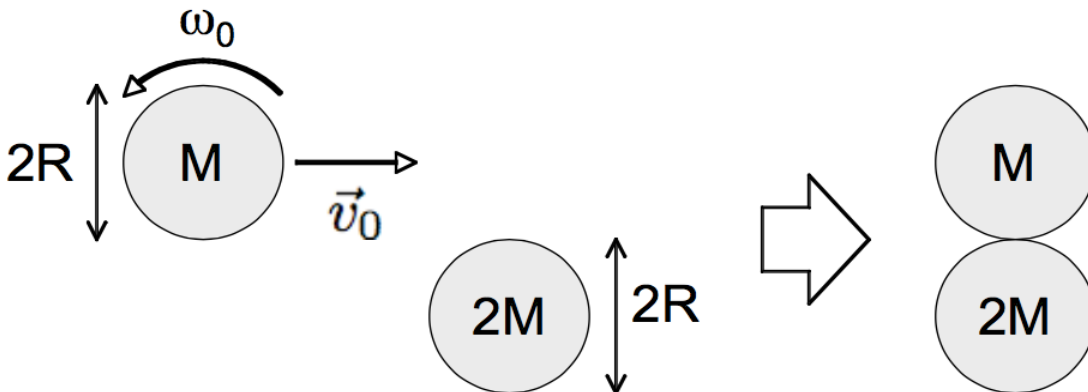
α) Ένα carousel ξεκινά να περιστρέφεται από ακινησία με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega} = 0.02 \text{ s}^{-2}$. Μία γυναίκα που στέκεται σε απόσταση 6 m από τον άξονα περιστροφής βαστάει μια μπάλα μάζας 2 kg . Υπολογίστε το μέγεθος και την κατεύθυνση της δύναμης που πρέπει να ασκεί η γυναίκα στην μπάλα σε χρόνο $t = 5 \text{ s}$ αφού το carousel ξεκινά να περιστρέφεται ώστε η μπάλα να μην κινείται ως προς την γυναίκα. (1.5)



β) Σώμα μάζας $m = 6 \text{ kg}$ κινείται πάνω στον άξονα x υπό την επίδραση της διατηρητικής δύναμης $F(x) = 24x - 6x^2$ (μονάδες του x είναι m). Σε ποιες τιμές του x βρίσκονται τα σημεία ισορροπίας; (0.5) Ποια η κυκλική συχνότητα ω των μικρών ταλαντώσεων γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας; (0.5)

Θέμα 4° (2.5 μονάδες):

Ομογενής δίσκος μάζας M και διαμέτρου $2R$ κινείται πάνω σε λεία επιφάνεια προς έναν δεύτερο ομογενή δίσκο μάζας $2M$ και διαμέτρου $2R$. Ο πρώτος δίσκος έχει αρχικά μεταφορική ταχύτητα \vec{v}_0 και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 όπως φαίνεται στο σχήμα ενώ ο δεύτερος



δίσκος είναι αρχικά ακίνητος. Όταν ο πρώτος δίσκος έρχεται σε επαφή με τον δεύτερο δίσκο αμέσως κολλάνε και κινούνται ως ένα σώμα.

α) Ποια είναι η μεταφορική ταχύτητα του κέντρου μάζας και ποια η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας των ενωμένων δίσκων μετά την πρόσκρουση.

β) Για ποια τιμή της αρχικής γωνιακής ταχύτητας του πρώτου δίσκου ω_0 οι ενωμένοι δίσκοι δεν περιστρέφονται;

Η ροπή αδράνειας δίσκου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$